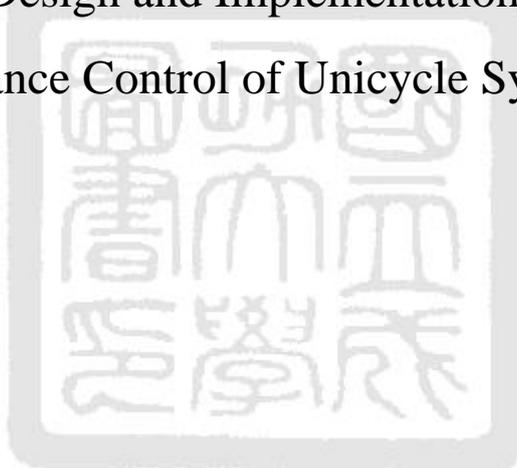


國立成功大學  
工程科學系碩士班  
碩士論文

單輪車系統平衡控制之設計與實現

Design and Implementation of  
Balance Control of Unicycle Systems



研究生：陳奕隆

指導教授：何明字

中華民國九十九年七月

國立成功大學

碩士論文

單輪車系統平衡控制之設計與實現  
Design and Implementation of Balance  
Control of Unicycle Systems

研究生：陳奕隆

本論業經審查及口試合格特此證明

論文考試委員：林鐘瑛 蕭霖笑  
陳信助 楊松霽  
何明宇

指導教授：何明宇

系(所)主管：廖德祿

中華民國 99 年 7 月 20 日

## 摘要

近年來輪型機器人的發展研究受到高度重視，除了應用於日常生活外，由於許多輪型機器人為非線性系統或甚至是不穩定的系統，故常被用來驗證各式非線性控制理論的效能，是非常適合學術研究和教學實驗用途的機電系統。本論文旨在設計並實現一單輪車系統，並使其能穩定平衡。論文中吾人以 Euler-Lagrange 法推導其完整的三維空間動態數學模型，再針對此數學模型進行系統模擬以及設計回授線性化控制器與順滑模態控制器，論文中吾人以慣性量測元件來偵測系統姿態，並輔以互補濾波器以得到較佳之回授訊號，且採用類比多工器達到擷取多組訊號之目的，最後以數位訊號處理器(TMS320F2812)實現平衡控制器以及互補濾波器並使系統達到穩定平衡。

## Abstract

In recent years, the development of wheel-type robots has been a highly active research field. Besides the daily-life applications, because of the fact that many wheel-type robots are nonlinear or even unstable systems. They are commonly used to study the performance of many nonlinear control schemes. These electromechanical systems are very suitable for the purposes of the educational experiments and academic research. This thesis aims to design and implement a unicycle system. In this thesis, the Euler-Lagrange method is used to derive the three-dimensional dynamic model of the unicycle system. The mathematical model is then used for the system simulation and designing the feedback linearization controller and sliding mode controller for stabilizing the system. Inertial measurement devices are used to sense posture angles of the system. The complementary filter is used to obtain the less noisy feedback signals from the inertial measurement devices. We also use an analog multiplexer to acquire multiple analog signals. Finally, the stabilizing controller and complementary filter are implemented through a digital signal processor (TMS320F2812) to achieve the purpose of balance control.

## 誌謝

回顧兩年的碩士生涯，不管在專業知識，或處事態度上，均有明顯的成長，如今碩士論文得以順利完成，實在要感謝在學期間幫助我的許多貴人。首先要感謝指導教授何明宇博士在研究所這兩年來的悉心教導與栽培，不斷從旁給予協助與叮嚀，使我學習到面臨困難時該秉持的態度與思考角度，且在論文撰寫期間，付出極大的耐心指導並逐字斧正，才可使本論文順利完成，在此謹獻上最誠摯的感謝。

此外，論文初審及口試期間，特別感謝林鐘熹、蕭霖癸、陳信助及楊松霈四位教授對論文內容的耐心閱讀和細心指正並提供寶貴的意見，使得本文能更加完善。

研究所這兩年的生活，感謝每天陪伴我的實驗室所有夥伴們，首先感謝毅瑋學長在專業知識、論文撰寫，以及口試期間的幫助及付出，感謝碩聰學長在碩論實作以及機構製作上的協助，以及在實作期間不斷給予的鼓勵，感謝紹偉學長在電路開發上的幫助及建議、也感謝 Yusie、仁正、士源、忠逸、任右、震豪學長在學業、碩論以及生活上的關心及幫助，感謝聆剛學長，在論文實作上的建議及幫忙；感謝同學萬鍾、柏瑋、彰億、文宣、志源在碩士兩年期間的幫助，使我在碩論以及學業上能夠克服不斷出現的難題，也感謝同學們彼此在生活上的互相照應，使得在艱辛難過的研究過程中，多了份溫暖及趣味的氛圍；也感謝誌佑、岳翰、文勝、聖儒學弟在日常生活中所帶來的歡笑以及生活上的幫助，使得實驗室多了歡樂的氣氛。另外，特別感謝盛偉實業公

司老闆閻大同先生、以及李金龍先生在機構製作上的幫助及專業知識的教導，使得本論文機構得以順利完成。

最後，謹將本論文獻給我最摯愛的家人，陳良塗先生、吳秋霞女士、陳奕潔，感謝父母親無悔的付出與照顧，使我能無後顧之憂的完成碩士學業，讓我受挫時，能有一個充電再出發的避風港，也感謝伊婷在我最痛苦的階段，給予我支持與鼓勵，使我繼續地堅持下去，感謝朋友們給予的建議及陪伴，我願將此榮耀與喜悅獻給大家。



# 目錄

	頁次
摘要 .....	I
Abstract.....	II
誌謝 .....	III
目錄 .....	V
圖表目錄 .....	VIII
第一章 緒論	
1-1 研究背景與動機 .....	1-1
1-2 研究目的 .....	1-2
1-3 研究步驟 .....	1-3
1-4 相關文獻探討 .....	1-4
1-5 實驗室相關成果 .....	1-7
1-6 論文結構 .....	1-8
第二章 單輪車系統與直流伺服馬達數學模型	
2-1 前言 .....	2-1
2-2 單輪車系統數學模型之建立 .....	2-2
2-3 永磁式直流馬達數學模型之建立與參數鑑別 .....	2-30
2-4 單輪車系統整體數學模型 .....	2-37
第三章 回授線性化理論探討	
3-1 前言 .....	3-1
3-2 輸入-輸出線性化 .....	3-1
3-3 全狀態線性化 .....	3-5

## 第四章 順滑模態控制理論探討

4-1 前言 .....	4-1
4-2 順滑模態的介紹 .....	4-1
4-3 迫近與順滑條件探討 .....	4-2
4-4 傳統順滑模態控制器設計方法 .....	4-4
4-5 滑動層的考量 .....	4-7
4-6 非線性機電系統順滑模態控制器設計方法 .....	4-9

## 第五章 平衡控制器設計與模擬結果

5-1 前言 .....	5-1
5-2 LQR 控制器理論與平衡控制器之設計與模擬 .....	5-1
5-3 全狀態回授線性化控制器之設計與模擬 .....	5-18
5-4 順滑模態控制器之設計與模擬 .....	5-26
5-5 控制器模擬響應比較 .....	5-36

## 第六章 單輪車系統機構設計與製作

6-1 前言 .....	6-1
6-2 單輪車系統機構設計與製作 .....	6-2
6-3 馬達角度感測器 .....	6-16

## 第七章 外部硬體電路介紹

7-1 前言 .....	7-1
7-2 周邊硬體電路與規格 .....	7-1
7-2-1 電源管理與類比數位轉換電路 .....	7-1
7-2-2 PWM 馬達驅動電路 .....	7-6
7-2-3 姿態感測電路 .....	7-9
7-2-3-1 加速規 .....	7-9

7-2-3-2 陀螺儀 .....	7-11
7-3 系統核心晶片介紹 .....	7-22
7-3-1 數位訊號處理器 TMS320F2812 .....	7-22
7-3-1-1 QEP 模組簡介 .....	7-23
7-3-1-2 PWM 模組簡介 .....	7-24
7-3-1-3 通用型輸入輸出 (General Purpose I/O, GPIO) 介面 .....	7-27
 第八章 互補濾波器	
8-1 前言 .....	8-1
8-2 互補濾波器簡介 .....	8-1
8-3 互補濾波器之設計實現與模擬結果 .....	8-3
8-4 互補濾波器實作驗證 .....	8-13
 第九章 實驗結果	
9-1 前言 .....	9-1
9-2 單輪車系統平衡控制實驗 .....	9-2
9-3 實驗結論 .....	9-14
 第十章 結論與未來展望	
10-1 結論 .....	10-1
10-2 未來展望 .....	10-1
參考文獻 .....	Ref-1
附錄 A .....	A-1

# 圖表目錄

(圖目錄)

	頁次
圖 1-1 單輪車系統機械架構示意圖 .....	1-2
圖 1-2 研究步驟流程圖 .....	1-3
圖 1-3 村田製造所的 MURATA GIRL .....	1-5
圖 1-4 藤川明洋的單輪車系統 .....	1-6
圖 1-5 白井清一研究團隊的單輪車系統 .....	1-6
圖 1-6 Z. Sheng 等人的單輪車系統 .....	1-7
圖 1-7 S. Majima 等人的單輪車系統 .....	1-7
圖 2-1 單輪車系統機構圖 .....	2-1
圖 2-2 單輪車系統示意圖 .....	2-2
圖 2-3 系統車輪示意圖 .....	2-6
圖 2-4 車上座標系示意圖 .....	2-6
圖 2-5 座標軸旋轉示意圖 .....	2-7
圖 2-6 輪子與地表接觸示意圖 .....	2-17
圖 2-7 輪子切線速度分解示意圖 .....	2-19
圖 2-8 單輪車前傾角響應圖 .....	2-23
圖 2-9 單輪車左右傾角響應圖 .....	2-23
圖 2-10 單輪車偏向角響應圖 .....	2-24
圖 2-11 慣性輪單擺示意圖 .....	2-26
圖 2-12 輪型倒單擺系統示意圖 .....	2-28
圖 2-13 直流馬達等效電路與負載 .....	2-31

圖 2-14	直流馬達系統方塊圖 .....	2-34
圖 2-15	實際帶動車輪的馬達量測波德圖與參數模型波德圖比較...	2-35
圖 2-16	實際帶動轉盤的馬達量測波德圖與參數模型波德圖比較...	2-36
圖 2-17	不同輸入電壓之實際量測永磁式直流馬達波德圖 .....	2-36
圖 4-1	順滑模態 .....	4-2
圖 4-2	順滑條件示意圖 .....	4-2
圖 4-3	$\text{sgn}(S)$ 函數 .....	4-8
圖 4-4	$\text{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right)$ 函數 .....	4-8
圖 5-1	狀態回授控制系統結構示意圖 .....	5-2
圖 5-2	LQR 控制器控制方塊圖 .....	5-7
圖 5-3	LQR 控制器之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ ) .....	5-8
圖 5-4	LQR 控制器之車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ ) .....	5-9
圖 5-5	LQR 控制器之車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ ) .....	5-9
圖 5-6	LQR 控制器之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ ) .....	5-10
圖 5-7	LQR 控制器之轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ ) .....	5-10
圖 5-8	LQR 控制器之轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ ) .....	5-11
圖 5-9	LQR 控制器之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-11

圖 5-10	LQR 控制器之車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ ).....	5-12
圖 5-11	LQR 控制器之車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-12
圖 5-12	LQR 控制器之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-13
圖 5-13	LQR 控制器之轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-13
圖 5-14	LQR 控制器之轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-14
圖 5-15	LQR 控制器之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-15
圖 5-16	LQR 控制器之車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-15
圖 5-17	LQR 控制器之車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-16
圖 5-18	LQR 控制器之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-16
圖 5-19	LQR 控制器之轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-17
圖 5-20	LQR 控制器之轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-17
圖 5-21	LQR 控制器之單輪車偏向角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-18
圖 5-22	回授線性化控制器控制方塊圖 .....	5-24

圖 5-23	回授線性化之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-25
圖 5-24	回授線性化之轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-25
圖 5-25	回授線性化之轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ ) .....	5-26
圖 5-26	順滑模態控制器控制方塊圖 .....	5-33
圖 5-27	順滑模態之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ ) .....	5-34
圖 5-28	順滑模態之車輪角度模擬響應圖( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ ) .....	5-35
圖 5-29	順滑模態之車輪控制電壓模擬響應圖( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ )...	5-35
圖 5-30	回授線性化與 LQR 控制器之單輪車左右傾角模擬響應 比較圖 .....	5-36
圖 5-31	回授線性化與 LQR 控制器之轉盤角速度模擬響應比較圖 .	5-37
圖 5-32	回授線性化與 LQR 控制器之轉盤控制電壓模擬響應 比較圖 .....	5-37
圖 5-33	順滑模態與 LQR 控制器之單輪車前後傾角模擬響應 比較圖 .....	5-38
圖 5-34	順滑模態與 LQR 控制器之車輪角度模擬響應比較圖 .....	5-38
圖 5-35	順滑模態與 LQR 控制器之車輪控制電壓模擬響應 比較圖 .....	5-39
圖 5-36	LQR 控制器之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.042$ ) .....	5-40
圖 5-37	回授線性化之單輪車左右傾角模擬響應圖	

	( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.042$ ) .....	5-41
圖 5-38	回授線性化之轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.042$ ) .....	5-41
圖 5-39	回授線性化之轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.042$ ) .....	5-42
圖 5-40	LQR 控制器之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.18, \beta(0)=0$ ) .....	5-42
圖 5-41	順滑模態之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.18, \beta(0)=0$ ) .....	5-43
圖 5-42	順滑模態之車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.18, \beta(0)=0$ ) .....	5-43
圖 5-43	順滑模態之車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.18, \beta(0)=0$ ) ...	5-44
圖 5-44	單輪車系統控制方塊圖 .....	5-44
圖 5-45	單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.043$ ) .....	5-45
圖 5-46	單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ ) .....	5-46
圖 5-47	車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ ) .....	5-46
圖 5-48	車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ ) .....	5-47
圖 5-49	單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ ) .....	5-47
圖 5-50	轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ ) .....	5-48
圖 5-51	轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ ) .....	5-48
圖 5-52	單輪車系統之偏向角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ ) ..	5-49
圖 6-1	單輪車機構示意圖 .....	6-1
圖 6-2	轉盤與軸心卡榫結構示意圖 .....	6-3
圖 6-3	轉盤與軸心結合示意圖 .....	6-3
圖 6-4	連坐軸承 .....	6-4

圖 6-5	繞性聯軸器 .....	6-4
圖 6-6	上盤機構示意圖 .....	6-5
圖 6-7	窄車輪實體圖 .....	6-6
圖 6-8	寬車輪實體圖 .....	6-6
圖 6-9	底盤組裝示意圖 .....	6-7
圖 6-10	壁眼軸承 .....	6-7
圖 6-11	時規皮帶與皮帶輪組 .....	6-8
圖 6-12	惰輪實際機構 .....	6-9
圖 6-13	鋁柱結構 .....	6-9
圖 6-14	鋁柱實體圖 .....	6-10
圖 6-15	馬達 .....	6-10
圖 6-16	保護裝置實體圖 .....	6-11
圖 6-17	單輪車上半部實體機構圖 .....	6-12
圖 6-18	單輪車底部實體機構圖 .....	6-12
圖 6-19	單輪車實體機構圖 .....	6-13
圖 6-20	單輪車實體機構正視圖 .....	6-14
圖 6-21	單輪車實體機構側視圖 .....	6-15
圖 6-22	光學編碼器內部結構 .....	6-16
圖 6-23	光學編碼器之輸出示意圖 .....	6-17
圖 7-1	穩壓電路 LM1084 應用電路圖片 .....	7-2
圖 7-2	穩壓電路 LM2576 應用電路圖 .....	7-3
圖 7-3	穩壓電路 LM317 實際電路圖 .....	7-3
圖 7-4	類比轉數位晶片應用電路 .....	7-4
圖 7-5	類比多工器 ADG506A 應用電路圖 .....	7-5

圖 7-6	類比多工器 ADG506A 真值表.....	7-5
圖 7-7	電源管理與 A/D 轉換電路實體圖 .....	7-6
圖 7-8	全橋控制晶片 A3941 應用電路圖 .....	7-7
圖 7-9	馬達驅動 H-Bridge 電路圖 .....	7-8
圖 7-10	PWM 驅動電路實體.....	7-9
圖 7-11	加速規實體與軸向定義圖.....	7-11
圖 7-12	陀螺儀 IDG-300 周邊電路圖 .....	7-11
圖 7-13	陀螺儀 IDG-300 之 X 軸基準電壓.....	7-13
圖 7-14	陀螺儀 IDG-300 之 Y 軸基準電壓 .....	7-13
圖 7-15	未經移動平均濾波器處理之光學編碼器訊號 .....	7-14
圖 7-16	陀螺儀校正流程圖.....	7-15
圖 7-17	陀螺儀 X 軸與光學編碼器訊號比較 .....	7-15
圖 7-18	陀螺儀 Y 軸與光學編碼器訊號比較 .....	7-16
圖 7-19	陀螺儀 X 軸乘上轉換因子與光學編碼器訊號比較.....	7-17
圖 7-20	陀螺儀 Y 軸乘上轉換因子與光學編碼器訊號比較 .....	7-17
圖 7-21	IDG-300 陀螺儀實體架設與軸向定意圖 .....	7-18
圖 7-22	IDG-300 與 ADXRS300 訊號比較圖 .....	7-19
圖 7-23	ADXRS300 周邊電路圖 .....	7-20
圖 7-24	ADXRS300 實際架設與軸向定義圖 .....	7-20
圖 7-25	陀螺儀 ADXRS300 基準電壓 .....	7-21
圖 7-26	ADXRS300 與光學編碼器訊號比較 .....	7-21
圖 7-27	ADXRS300 乘上轉換因子與光學編碼器訊號比較.....	7-22
圖 7-28	方形編碼脈波及計數與時脈與方向之示意圖 .....	7-24
圖 7-29	PWM 非對稱波形示意圖 .....	7-27

圖 7-30	PWM 對稱波形示意圖 .....	7-27
圖 8-1	互補濾波器處理流程方塊圖 .....	8-3
圖 8-2	加速規量測角度模擬圖 .....	8-7
圖 8-3	陀螺儀量測角速度模擬圖 .....	8-7
圖 8-4	理想角度模擬圖 .....	8-8
圖 8-5	陀螺儀角速度訊號經積分模擬圖 .....	8-9
圖 8-6	理想角度頻譜 .....	8-9
圖 8-7	加速規模擬角度頻譜 .....	8-10
圖 8-8	陀螺儀模擬積分角度頻譜 .....	8-10
圖 8-9	互補濾波器輸出角度與理想角度比較 .....	8-11
圖 8-10	互補濾波器輸出角度與理想角度比較局部放大圖 .....	8-12
圖 8-11	濾波器之比較 .....	8-12
圖 8-12	濾波器訊號與理想角度誤差 .....	8-13
圖 8-13	光學編碼器量測角度訊號圖 .....	8-14
圖 8-14	光學編碼器量測角度經移動平均濾波器訊號圖 (IDG-300) ..	8-14
圖 8-15	實際加速規量測角度訊號圖 (IDG-300) .....	8-15
圖 8-16	實際陀螺儀 IDG-300 量測角速度圖 .....	8-15
圖 8-17	陀螺儀 IDG-300 角速度經積分與基準角度比較圖 .....	8-16
圖 8-18	光學編碼器角度頻譜 (IDG-300) .....	8-17
圖 8-19	加速規角度頻譜 (IDG-300) .....	8-17
圖 8-20	陀螺儀積分角度頻譜 (IDG-300) .....	8-18
圖 8-21	加速規角度經低通濾波與基準角度比較圖 (IDG-300) .....	8-18
圖 8-22	陀螺儀 IDG-300 積分經高通濾波與基準角度比較圖 .....	8-19
圖 8-23	訊號經互補濾波器角度與基準角度比較圖 (IDG-300) .....	8-19

圖 8-24	互補濾波器誤差與加速規角度誤差比較圖(IDG-300).....	8-20
圖 8-25	光學編碼器量測角度經濾波訊號圖(ADXRS300).....	8-21
圖 8-26	實際加速規量測角度訊號圖(ADXRS300).....	8-21
圖 8-27	實際陀螺儀 ADXRS300 量測角速度圖 .....	8-22
圖 8-28	陀螺儀 ADXRS300 角速度經積分與基準角度比較圖 .....	8-22
圖 8-29	光學編碼器角度頻譜(ADXRS300) .....	8-23
圖 8-30	加速規角度頻譜(ADXRS300).....	8-23
圖 8-31	陀螺儀積分角度頻譜(ADXRS300) .....	8-24
圖 8-32	加速規角度經低通濾波與基準角度比較圖(ADXRS300) ....	8-24
圖 8-33	陀螺儀 ADXRS300 積分經高通濾波與基準角度比較圖 ....	8-25
圖 8-34	訊號經互補濾波器角度與基準角度比較圖(ADXRS300) ....	8-26
圖 8-35	互補濾波器誤差與加速規角度誤差比較圖(ADXRS300) ....	8-26
圖 8-36	互補濾波器輸出前後傾角頻譜 .....	8-27
圖 8-37	加速規 x 軸角度頻譜 .....	8-27
圖 8-38	陀螺儀 ADXRS300 積分角度頻譜 .....	8-28
圖 8-39	互補濾波器輸出左右傾角頻譜 .....	8-28
圖 8-40	加速規 y 軸角度頻譜 .....	8-29
圖 8-41	陀螺儀 IDG-300 積分角度頻譜 .....	8-29
圖 9-1	單輪車整體系統架構方塊圖 .....	9-1
圖 9-1	單輪車整體系統控制方塊圖 .....	9-2
圖 9-2	單輪車系統前後傾角實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ ) .....	9-4
圖 9-3	單輪車系統車輪角度實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ ) .....	9-4

圖 9-4	單輪車系統車輪控制電壓實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ ) .....	9-5
圖 9-5	單輪車系統左右傾角實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ ) .....	9-5
圖 9-6	單輪車系統轉盤角速度實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ ) .....	9-6
圖 9-7	單輪車系統轉盤控制電壓實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ ) .....	9-6
圖 9-8	單輪車系統前後傾角實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ ) .....	9-7
圖 9-9	單輪車系統車輪角度實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ ) .....	9-7
圖 9-10	單輪車系統車輪控制電壓實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ ) .....	9-8
圖 9-11	單輪車系統左右傾角實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ ) .....	9-8
圖 9-12	單輪車系統轉盤角速度實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ ) .....	9-9
圖 9-13	單輪車系統轉盤控制電壓實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ ) .....	9-9
圖 9-14	擾動下單輪車系統前後傾角響應圖 .....	9-11
圖 9-15	擾動下單輪車系統車輪角度響應圖 .....	9-11
圖 9-16	擾動下單輪車系統車輪控制電壓響應圖 .....	9-12
圖 9-17	擾動下單輪車系統左右傾角響應圖 .....	9-12

圖 9-18	擾動下單輪車系統轉盤角速度響應圖.....	9-13
圖 9-19	擾動下單輪車系統轉盤控制電壓響應圖.....	9-13

(表目錄)

	頁次
表 2-1	直流馬達參數符號定義..... 2-31
表 2-2	兩軸直流馬達參數表..... 2-34
表 5-1	單輪車系統物理參數..... 5-4
表 7-1	單輪車系統電壓源..... 7-1
表 7-2	IDG-300 特性表..... 7-11
表 7-3	ADXRS300 特性表..... 7-19



# 第一章 緒論

## 1-1 研究背景與動機

隨著日新月異的電子及機械相關技術及產品的發展，各類機電系統，不管是居家用途、學術研究、商業宣傳、運載系統等，均不斷的被開發研究。而機電系統中，機器人是具有代表性之一的產品，機器人的發展儼然成為提升現今生活品質不可或缺的一部份，尤其是在高危險性以及高精密度的應用層面，更突顯其重要性，故機器人相關主題之研究一直是各大廠商或研究單位的主軸之一，而與機器人設計相關的背景知識涵蓋了電子、電機、機械、通訊、控制等，由此可看出机器人是由跨領域科技整合而來。

機器人的行走模式非常多樣，包括足型、輪型、履帶型等都是常見的機器人移動模式。其中又以輪型機器人的應用範圍最為廣泛，而其中具高度困難度與新奇度的單輪車機器人也是近年各大單位極力開發的主題，而最具代表性的系統莫過於日本村田製造所的 MURATA GIRL [1]，此系統主要用於商業宣傳以及提升大眾對機器人之興趣，另外，由本田公司所開發之 U3-X [2] 單輪車載人機器人，此機器人的開發除了載人用途外，最重要是其以單輪型態達到全向移動目的之重大突破，近期還有斯洛伐尼亞的發明家 Aleksander Polutnik 所發明的載人單輪系統 eniCycle [3]，這些都是商業領域著名之單輪車機器人系統。而在學術研究上，由於單輪車系統具有不穩定、非線性以及欠致動性之特性，且其數學模型相當複雜，就控制觀點而言，此系統具有高度的挑戰性，非常適合驗證各控制器之效能，故有其研究之價值。

## 1-2 研究目的

本實驗室近期在輪型機器人的發展上，已有些許成果，如全向移動機器人[4]-[6]，或兩輪倒單擺機器人[7]，均是實驗室在輪型機器人發展上之成果。

本論文目的在於建構一個單輪車系統，包含其數學模型的推導以及機電系統的設計製作，並設計相關控制器以令其能穩定平衡。其機械架構如圖 1-1 所示，在不加以控制的情況下，系統將不穩定地前後或左右傾倒，故吾人在系統上下方各設置一致動器，目的為維持系統左右及前後平衡。

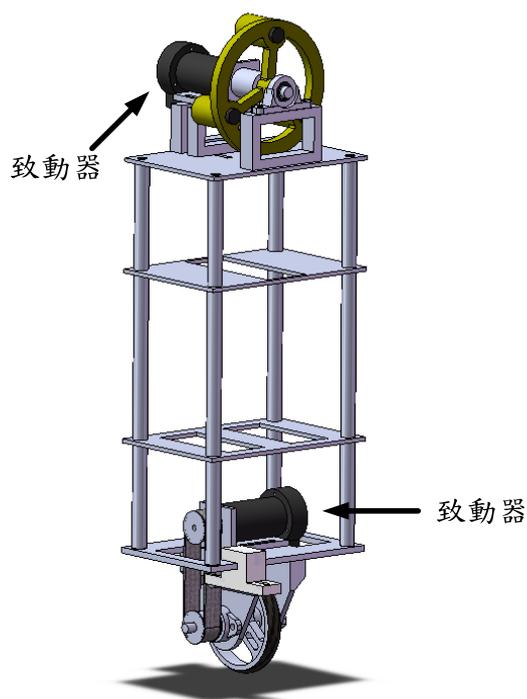


圖 1-1 單輪車系統機械架構示意圖

單輪車系統在運動過程中，不管是立定或者進行移動及轉彎等進階動作，均需建立在平衡的條件下，故平衡控制對單輪車系統而言，是最

基礎但也是最重要的一環。

### 1-3 研究步驟

本論文研究步驟流程如圖 1-2 所示。

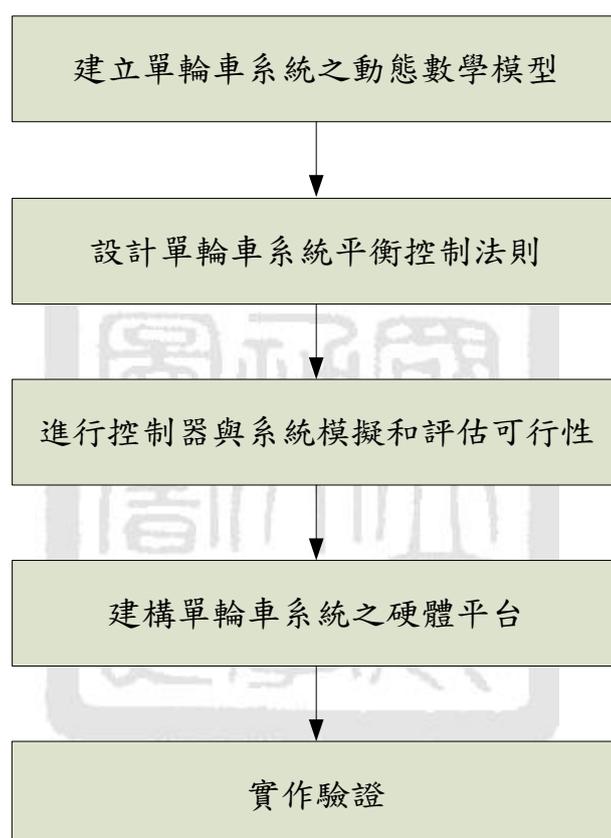


圖 1-2 研究步驟流程圖

本論文的研究步驟分述如下：

(1) 建立單輪車系統之動態數學模型：

本文以 Euler-Lagrange 法以及座標軸轉換理論為基礎，針對單輪車系統推導其完整之動態數學模型，以利系統模擬分析，和控制器設計及模擬。

## (2) 設計單輪車系統平衡控制法則

由動態數學模型可得知，本系統在接近平衡點時，忽略偏向角後，可以解耦合為前後方向與左右方向兩個獨立的子系統，故本論文除了設計 LQR 控制器外，另外針對解耦合後之左右方向動態做回授線性化控制器設計，以及解耦合後之前後方向動態做順滑模態控制器之設計，以完成系統平衡控制。

## (3) 進行控制器與系統模擬和評估可行性

利用 MATLAB/Simulink 軟體進行控制器與系統數值模擬，並評估其可行性。

## (4) 建構單輪車系統之硬體平台

本系統實驗平台基本架構如圖 1-1 所示，系統的平衡仰賴輪子的移動來維持前後平衡，以及轉盤的轉動維持左右平衡，另外搭配相關感測器，包括光學編碼器、陀螺儀、加速規，並設計所需之電子電路。

## (5) 實作驗證

將實際系統整合並加以實現系統平衡控制，驗證控制器可行性。

# 1-4 相關文獻探討

單輪車系統的研究開發，不管在商業或學術單位都有相關人員投入研究，商業上最著名莫過於 1-1 節所提之 MURATA GIRL [1]，如圖 1-3，此系統以陀螺儀偵測姿態，並搭載超音波感測器、影像感測器以及藍牙用以偵測與物體之間距離和回傳運動時影像。



圖 1-3 村田製造所的 MURATA GIRL

學術研究方面，近 20 年來也有許多的研究人員進行單輪車系統的相關研究，不管是單純模擬控制理論應用於單輪車系統上之控制效能的研究，如 D. V. Zenkov [8] 為首的研究人員，以 Lyapunov-Malkin Theorem 應用於單輪車系統的模擬研究。在實際建構出單輪車系統平台，近年來均有不少相關主題的研究發表，而這些實際建構出單輪車系統平台的研究文獻，其左右平衡控制機制除了與 MURATA GIRL 以慣性轉盤型式相同外，另外也有許多不同型態的單輪車系統，例如日本學者藤川明洋[9] 所開發的單輪車機器人，如圖 1-4，是用類似鐘擺的方式來維持左右的平衡，但此系統在數學模型的推導將前後動態以及左右動態分別推導，故並無完整的三維空間動態數學模型。還有以白井清一[10] 為首的研究人員，以慣性桿的方式來達到左右平衡的目的，此研究具完整三維空間的數學模型為基礎，並自行推導一套陀螺儀積分的漂移誤差觀測法並加以修正誤差，其系統實體如圖 1-5 所示。另外還有以 Z. Sheng 和 K. Yamafuji[11, 12] 等研究人員開發的單輪車系統，此系統將慣性轉盤垂直於車身以控制偏向角度來維持系統的平衡，其原理為讓單輪車轉向傾倒的方向再配合前後移動使系統平衡，其機構示意圖如圖 1-6，而此單輪

車系統其前後移動機制採用仿人騎車形式，與其他系統有很大的差異。近期還有 S. Majima [13, 14] 等人所開發之單輪車系統，此系統採用慣性轉盤的機械結構來控制左右平衡，另外，此系統上使用了兩個加速規以估測及消除量測角度訊號時，因系統移動或震動所參雜的加速度雜訊，此外，此主題研究重點在於發展一套控制方法以控制單輪車系統的偏向角度，其系統結構如圖 1-7 所示。

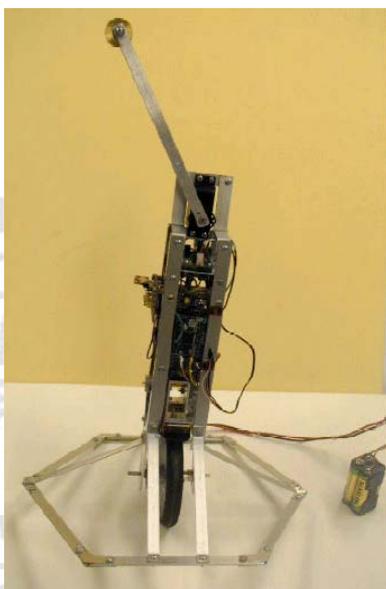


圖 1-4 藤川明洋的單輪車系統

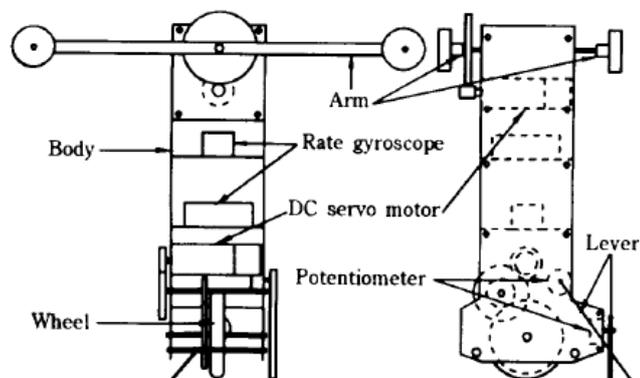


圖 1-5 白井清一研究團隊的單輪車系統

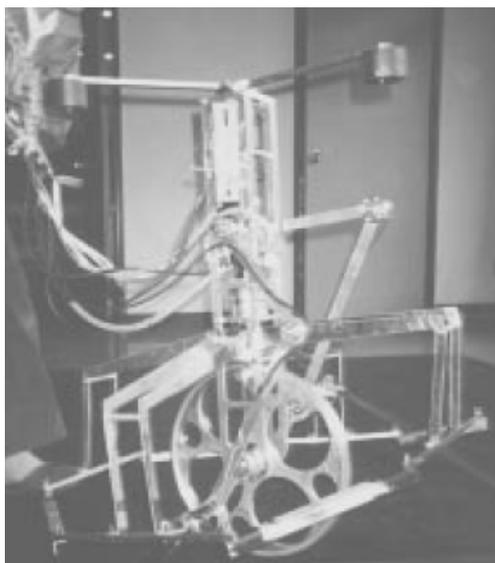


圖 1-6 Z. Sheng 等人的單輪車系統

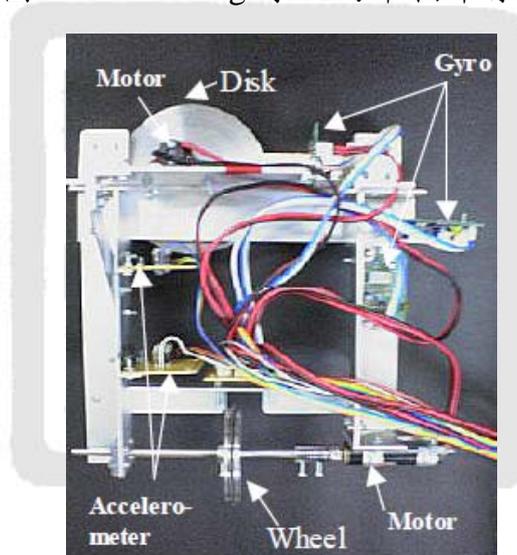


圖 1-7 S. Majima 等人的單輪車系統

## 1-5 實驗室相關成果

本實驗室多年來致力於欠致動性系統以及輪型機器人系統的研究，迄今在各系統以及控制器上已有許多成果。相關欠致動性系統與控制器的發展有洪介仁學長[15]以電腦為基礎搭配運動軸卡以 LQR 控制器完成車與桿倒單擺系統之平衡控制，凌朝雄學長[16]以電腦為基礎搭配運動

軸卡並以回授線性化搭配及點配置法完成慣性輪單擺的非線性控制，呂育勝學長[17]以順滑模態與非線性系統順滑模態完成球與弧系統的平衡控制，劉士源學長[18]以 Lagrange 法和座標軸轉換理論推導三維空間球與球系統，並以回授線性化與順滑模態控制器實現平衡目的。輪型機器人的發展有翁義清學長[4]以狀態回授線性化結合 PID 控制器完成全向移動機器人之路徑追蹤控制，徐嘉明學長[5]以 CMOS 影像感測器建立視覺伺服為基礎之全向移動機器人追蹤控制，顏忠逸學長[6]以兩顆 CMOS 感測器模擬人的雙眼完成即時物體追蹤之立體視覺導引全向移動機器人之研製，洪聆剛學長[7]以 DSP 為基礎搭配互補濾波器完成兩輪倒單擺機器人的平衡控制。

## 1-6 論文結構

本論文共分為 10 個章節，分別為；

第一章：緒論

第二章：單輪車系統與直流馬達數學模型

第三章：回授線性化理論探討

第四章：順滑模態控制理論探討

第五章：平衡控制器設計與模擬結果

第六章：單輪車系統機構設計與製作

第七章：外部硬體電路介紹

第八章：互補濾波器

第九章：實驗結果

第十章：結論與未來展望

## 第二章 單輪車系統與直流伺服馬達數學模型

### 2-1 前言

在本章中吾人將使用 Euler-Lagrange method 以及座標軸旋轉之觀念推導單輪車系統之數學模型，目的是將複雜的物理現象以簡單的結構和數學方式加以描述，以方便作為系統分析及控制器設計及模擬之用。整個單輪車系統的機構圖如圖 2-1 所示，由圖 2-1 可知，整個系統的動態可分為兩個部份：一個為機構系統的動態；另一個為直流伺服馬達的動態。在此吾人將分別對這兩個部份作數學模型的建立，最後再將這兩個系統合併成為一個完整的數學模型，以方便系統模擬及控制器設計之用。本章節內容有：2-2 節為單輪車系統數學模型之建立；2-3 節為直流伺服馬達數學模型與其參數識別；2-4 節為單輪車整體系統數學模型。

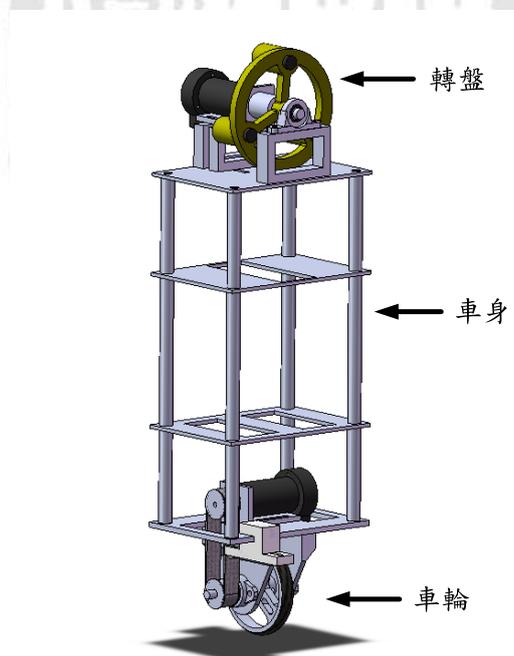


圖 2-1 單輪車系統機構圖

## 2-2 單輪車系統數學模型之建立

本論文採用 Euler-Lagrange method 來對單輪車系統作數學模型之建立，推導過程中所使用之座標軸轉換理論及公式請參照本實驗室 98 級劉士源論文「以回授線性化與順滑模態控制之球與球系統的平衡控制」[18] 以及動力學[19]，為了數學上清楚表示，文中在符號上標處加橫線代表向量，以單位向量加上括號代表座標系，例如  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 。依圖 2-1 可將單輪車系統簡化成圖 2-2 單輪車系統示意圖：

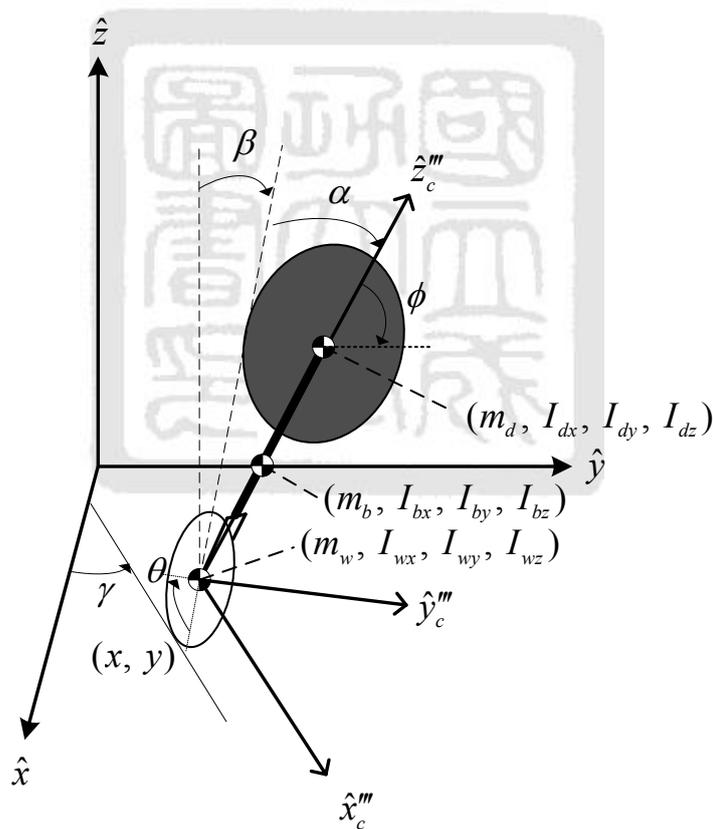


圖 2-2 單輪車系統示意圖

圖 2-2 中系統參數定義如下：

$\alpha$ ：單輪車平行行進方向之前後擺動角度 (rad)

$\beta$  : 單輪車垂直於行進方向之左右擺動角度 (rad)

$\gamma$  : 單輪車偏向角度 (rad)

$\theta$  : 車輪的旋轉角度 (rad)

$\phi$  : 轉盤的旋轉角度 (rad)

$m_w$  : 輪子的質量 (kg)

$m_b$  : 車身的質量 (kg)

$m_d$  : 轉盤的質量 (kg)

$I_{wx}$  : 輪子繞  $\hat{x}_c'''$  軸的轉動慣量 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )

$I_{wy}$  : 輪子繞  $\hat{y}_c'''$  軸的轉動慣量 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )

$I_{wz}$  : 輪子繞  $\hat{z}_c'''$  軸的轉動慣量 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )

$I_{bx}$  : 車身繞  $\hat{x}_c'''$  軸的轉動慣量 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )

$I_{by}$  : 車身繞  $\hat{y}_c'''$  軸的轉動慣量 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )

$I_{bz}$  : 車身繞  $\hat{z}_c'''$  軸的轉動慣量 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )

$I_{dx}$  : 轉盤繞  $\hat{x}_c'''$  軸的轉動慣量 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )

$I_{dy}$  : 轉盤繞  $\hat{y}_c'''$  軸的轉動慣量 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )

$I_{dz}$  : 轉盤繞  $\hat{z}_c'''$  軸的轉動慣量 ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ )

$l_r$  : 輪子的半徑 (m)

$l$  : 車身長 (m)

$(x, y)$  : 大地座標系上輪子接觸地面之位置

本論文採用 Euler-Lagrange Method 來求得系統模型，故需要系統之總動能以及總位能。單輪車系統之系統總動能如(2-1)式所示：

$$T = T_{wheel} + T_{body} + T_{disk} \quad (2-1)$$

其中

$$T_{wheel} = T_{w\_moving} + T_{w\_rotation} \quad (2-2)$$

$$T_{body} = T_{b\_moving} + T_{b\_rotation} \quad (2-3)$$

$$T_{disk} = T_{d\_moving} + T_{d\_rotation} \quad (2-4)$$

(2-1)式中  $T_{wheel}$  為車輪動能， $T_{body}$  為車身動能， $T_{disk}$  為轉盤動能。

$T_{w\_moving}$ 、 $T_{w\_rotation}$  分別為車輪位移動能以及旋轉動能， $T_{b\_moving}$ 、 $T_{b\_rotation}$ 、

$T_{d\_moving}$ 、 $T_{d\_rotation}$  分別為車身以及轉盤之位移動能及旋轉動能。又知位

動能與位置向量之關係為

$$T_{w\_moving} = \frac{1}{2} m_w \dot{\bar{r}}_w^T \dot{\bar{r}}_w \quad (2-5)$$

$$T_{d\_moving} = \frac{1}{2} m_d \dot{\bar{r}}_d^T \dot{\bar{r}}_d \quad (2-6)$$

$$T_{b\_moving} = \frac{1}{2} m_b \dot{\bar{r}}_b^T \dot{\bar{r}}_b \quad (2-7)$$

其中  $\bar{r}_w$ 、 $\bar{r}_b$ 、 $\bar{r}_d$  分別為車輪，車身以及轉盤之質心在大地座標系上的位

置向量。考慮大地座標系之單位向量  $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$ ，以  $\bar{r}_w$  為例，向量  $\bar{r}_w$  定義

為  $\bar{r}_w = r_{wx}\hat{x} + r_{wy}\hat{y} + r_{wz}\hat{z}$ ，為了接下來符號表示的方便起見，吾人以行向量

形式(column vector format)來表示向量

$$\bar{r}_w = \begin{bmatrix} r_{wx} \\ r_{wy} \\ r_{wz} \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

同理

$$\bar{r}_d = \begin{bmatrix} r_{dx} \\ r_{dy} \\ r_{dz} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

$$\bar{r}_b = \begin{bmatrix} r_{bx} \\ r_{by} \\ r_{bz} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

首先，根據圖 2-3 系統車輪示意圖以及三角函數的關係可得車輪在大地座標系上位置向量之各分量為

$$r_{wx} = x - l_r \sin \beta \sin \gamma \quad (2-11)$$

$$r_{wy} = y + l_r \sin \beta \cos \gamma \quad (2-12)$$

$$r_{wz} = l_r \cos \beta \quad (2-13)$$

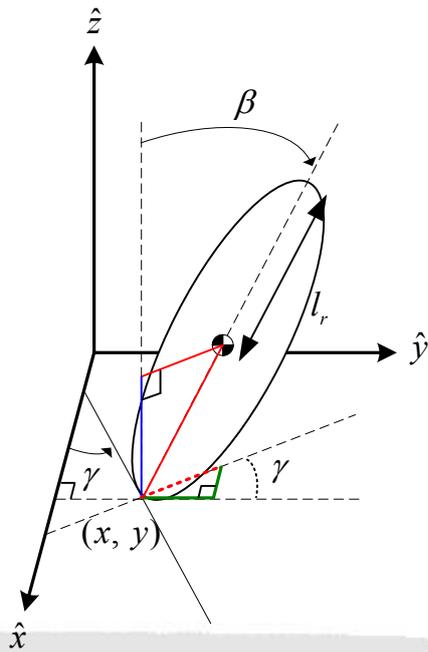


圖 2-3 系統車輪示意圖

接著將利用座標軸旋轉的觀念求得車身以及轉盤之位置向量。首先定義一個以輪子質心為原點之車上座標系  $(\hat{x}_c, \hat{y}_c, \hat{z}_c)$ ，如圖 2-4 所示。

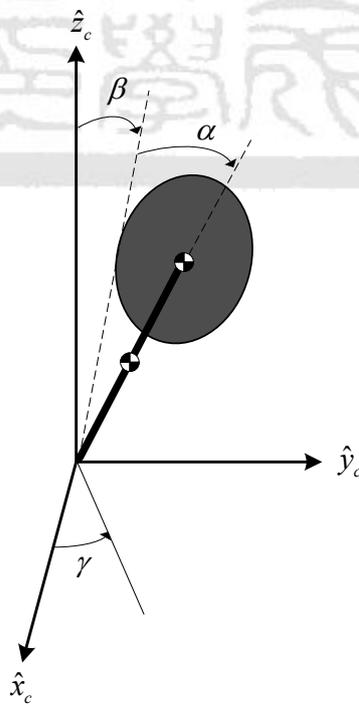


圖 2-4 車上座標系示意圖

接著採用固定體座標旋轉(body-fixed rotations)的觀念，且系統座標軸旋轉示意圖如圖 2-5 所示，系統之旋轉順序為，先對座標軸 $(\hat{x}_c, \hat{y}_c, \hat{z}_c)$ 之 $\hat{z}_c$ 軸逆時針旋轉 $\gamma$ ，如圖 2-5(a)，再對旋轉後座標軸 $(\hat{x}'_c, \hat{y}'_c, \hat{z}'_c)$ 之 $\hat{x}'_c$ 軸順時針旋轉 $\beta$ ，如圖 2-5(b)，最後再對二次旋轉後座標軸 $(\hat{x}''_c, \hat{y}''_c, \hat{z}''_c)$ 之 $\hat{y}''_c$ 軸逆時針旋轉 $\alpha$ ，如圖 2-5(c)。故可得車上座標系旋轉到體座標系上之旋轉矩陣(rotation matrix)  ${}^P R_C$  為

$$\begin{aligned}
 {}^P R_C &= R_{\hat{y}'_c, \alpha} R_{\hat{x}'_c, \beta} R_{\hat{z}_c, \gamma} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-14)
 \end{aligned}$$

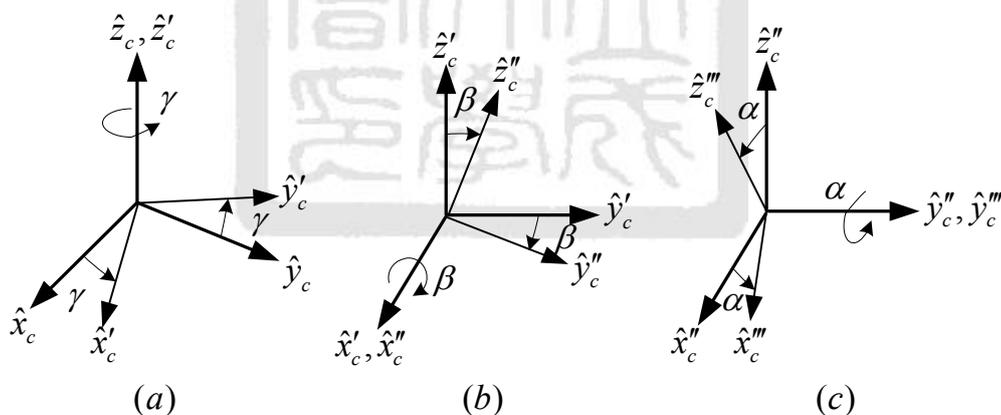


圖 2-5 座標軸旋轉示意圖

而車上座標系 $(\hat{x}_c, \hat{y}_c, \hat{z}_c)$ 對於旋轉後座標系 $(\hat{x}'''_c, \hat{y}'''_c, \hat{z}'''_c)$ 之關係為

$$\begin{bmatrix} \hat{x}'''_c \\ \hat{y}'''_c \\ \hat{z}'''_c \end{bmatrix} = {}^P R_C \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{y}_c \\ \hat{z}_c \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

或表示為

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{y}_c \\ \hat{z}_c \end{bmatrix} = {}^P R_C^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_c''' \\ \hat{y}_c''' \\ \hat{z}_c''' \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

其中

$${}^P R_C^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

又知轉盤質心位置向量在旋轉後之座標系  $(\hat{x}_c''', \hat{y}_c''', \hat{z}_c''')$  上為  $[0, 0, l]^T$ ，故可

得轉盤質心位置在車上座標系  $(\hat{x}_c, \hat{y}_c, \hat{z}_c)$  之各軸位置向量分量

$$r_{cdx} = (\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma)l \quad (2-18)$$

$$r_{cdy} = (\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma)l \quad (2-19)$$

$$r_{cdz} = l \cos \alpha \cos \beta \quad (2-20)$$

再由大地座標系與車上座標系之平移轉換關係，吾人將車上座標系之轉盤質心位置向量加上車輪在大地座標系上之質心向量，即得到轉盤質心在大地座標系上之位置向量各分量為

$$\begin{aligned} r_{dx} &= (\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma)l + r_{wx} \\ &= (\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma)l + x - l_r \sin \beta \sin \gamma \end{aligned} \quad (2-21)$$

$$\begin{aligned} r_{dy} &= (\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma)l + r_{wy} \\ &= (\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma)l + y + l_r \sin \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (2-22)$$

$$\begin{aligned} r_{dz} &= (\cos \alpha \cos \beta)l + r_{wz} \\ &= (\cos \alpha \cos \beta)l + l_r \cos \beta \end{aligned} \quad (2-23)$$

接著吾人假設車身為平均分佈之剛體，故其質心位置向量在座標系  $(\hat{x}_c''', \hat{y}_c''', \hat{z}_c''')$  上為  $[0 \ 0 \ \frac{l}{2}]^T$  同理可得車身在大地座標系上之位置向量各分量為

$$\begin{aligned} r_{bx} &= \frac{l}{2}(\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + r_{wx} \\ &= \frac{l}{2}(\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + x - l_r \sin \beta \sin \gamma \end{aligned} \quad (2-24)$$

$$\begin{aligned} r_{by} &= \frac{l}{2}(\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + r_{wy} \\ &= \frac{l}{2}(\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) + y + l_r \sin \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (2-25)$$

$$\begin{aligned} r_{bz} &= \frac{l}{2} \cos \alpha \cos \beta + r_{wz} \\ &= \frac{l}{2} \cos \alpha \cos \beta + l_r \cos \beta \end{aligned} \quad (2-26)$$

接著將位置向量作微分以求得車輪、車身以及轉盤之質心位移速度各分量。

車輪質心位移速度各分量：

$$\dot{r}_{wx} = \dot{x} - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma \quad (2-27)$$

$$\dot{r}_{wy} = \dot{y} + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma \quad (2-28)$$

$$\dot{r}_{wz} = -l_r \dot{\beta} \sin \beta \quad (2-29)$$

轉盤質心位移速度各分量：

$$\begin{aligned} \dot{r}_{dx} = & (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \gamma - \dot{\gamma} \sin \alpha \sin \gamma + \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ & - \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) l + \dot{x} - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (2-30)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{dy} = & (\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \gamma + \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \gamma + \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ & - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) l + \dot{y} + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma \end{aligned} \quad (2-31)$$

$$\dot{r}_{dz} = -l \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - l \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta - l_r \dot{\beta} \sin \beta \quad (2-32)$$

車身質心位移速度各分量：

$$\begin{aligned} \dot{r}_{bx} = & \frac{l}{2} (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \gamma - \dot{\gamma} \sin \alpha \sin \gamma + \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ & - \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) + \dot{x} - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma \end{aligned} \quad (2-33)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{by} = & \frac{l}{2} (\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \gamma + \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \gamma + \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ & - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \dot{y} + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma \end{aligned} \quad (2-34)$$

$$\dot{r}_{bz} = \frac{l}{2} (-\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta) - l_r \dot{\beta} \sin \beta \quad (2-35)$$

將(2-27)式、(2-28)式、(2-29)式代入(2-5)式可得車輪之位移動能

$$\begin{aligned} T_{w\_moving} = & \frac{1}{2} m_w [(\dot{x} - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma)^2 \\ & + (\dot{y} + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma)^2 + (l_r^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \beta)] \end{aligned} \quad (2-36)$$

將(2-30)式、(2-31)式、(2-32)式代入(2-6)式可得轉盤之位移動能

$$\begin{aligned}
T_{d\_moving} = & \frac{1}{2} m_d \{ [(\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \gamma - \dot{\gamma} \sin \alpha \sin \gamma + \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\
& - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) l \\
& + \dot{x} - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma]^2 \\
& + [(\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \gamma + \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \gamma + \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\
& - \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) l + \dot{y} + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma \\
& - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma]^2 + (-l \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - l \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta - l_r \dot{\beta} \sin \beta)^2 \}
\end{aligned} \tag{2-37}$$

將(2-33)式、(2-34)式、(2-35)式代入(2-7)式可得車身之位移動能

$$\begin{aligned}
T_{b\_moving} = & \frac{1}{2} m_b \{ [\frac{l}{2} (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \gamma - \dot{\gamma} \sin \alpha \sin \gamma + \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\
& - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) + \dot{x} - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma \\
& - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma]^2 + [\frac{l}{2} (\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \gamma + \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \gamma + \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\
& - \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \dot{y} + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma \\
& - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma]^2 + (-\frac{l}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - \frac{l}{2} \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta - l_r \dot{\beta} \sin \beta)^2 \}
\end{aligned} \tag{2-38}$$

接下來吾人將推導系統之旋轉動能。根據固定體座標旋轉之觀念，我們得到了旋轉矩陣 ${}^P R_C$ 如(2-14)式，又知旋轉矩陣與方向餘弦矩陣(direction cosine matrix)之關係為

$$\begin{aligned}
{}^P C_C = & {}^P R_C^{-1} = {}^P R_C^T \\
= & C_Z C_X C_Y
\end{aligned} \tag{2-39}$$

其中

$$C_X = R_{x_c, \beta}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \tag{2-40}$$

$$C_Y = R_{y_c, \alpha}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

$$C_Z = R_{z_c, \gamma}^T = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

由[18]知在體座標上之角速度矩陣 $\omega$ 與方向餘弦矩陣 $C$ 的關係為

$$\omega = C^T \cdot \dot{C} \quad (2-43)$$

由(2-39)式及(2-43)式可得

$$\begin{aligned} \omega_{bb} &= {}^P C_C^T \cdot {}^P \dot{C}_C \\ &= (C_Y^T C_X^T C_Z^T) (\dot{C}_Z C_X C_Y + C_Z \dot{C}_X C_Y + C_Z C_X \dot{C}_Y) \\ &= C_Y^T C_X^T C_Z^T \dot{C}_Z C_X C_Y + C_Y^T C_X^T \dot{C}_X C_Y + C_Y^T \dot{C}_Y \end{aligned} \quad (2-44)$$

整理得

$$\omega_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\beta} \sin \alpha - \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta & \dot{\alpha} - \dot{\gamma} \sin \beta \\ -\dot{\beta} \sin \alpha + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta & 0 & \dot{\beta} \cos \alpha + \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \beta \\ -\dot{\alpha} + \dot{\gamma} \sin \beta & -\dot{\beta} \cos \alpha - \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

接著再與角速度矩陣比較

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

即可得體座標上之車身角速度為

$$\bar{\omega}_b = \begin{bmatrix} \omega_{bx} \\ \omega_{by} \\ \omega_{bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \cos \alpha - \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \beta \\ \dot{\alpha} - \dot{\gamma} \sin \beta \\ -\dot{\beta} \sin \alpha + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

在轉盤的部份，因還存在有一自轉角度  $\phi$ ，故吾人以再旋轉一次座標軸的方式求得其角速度。所以吾人可得方向餘弦矩陣  ${}^P C_D$  為

$$\begin{aligned} {}^P C_D &= {}^P R_D^T \\ &= C_Z C_X C_Y C_{XX} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-48)$$

再由(2-43)式，吾人可得

$$\begin{aligned} \omega_{dd} &= {}^P C_D^T \dot{{}^P C}_D \\ &= (C_{XX}^T C_Y^T C_X^T C_Z^T) (\dot{C}_Z C_X C_Y C_{XX} + C_Z \dot{C}_X C_Y C_{XX} + C_Z C_X \dot{C}_Y C_{XX} + C_Z C_X C_Y \dot{C}_{XX}) \\ &= C_{XX}^T C_Y^T C_X^T C_Z^T \dot{C}_Z C_X C_Y C_{XX} + C_{XX}^T C_Y^T C_X^T \dot{C}_X C_Y C_{XX} + C_{XX}^T C_Y^T \dot{C}_Y C_{XX} + C_{XX}^T \dot{C}_{XX} \end{aligned} \quad (2-49)$$

再與角速度矩陣比較，吾人即可得在體座標系上之轉盤角速度為

$$\bar{\omega}_d = \begin{bmatrix} \omega_{dx} \\ \omega_{dy} \\ \omega_{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi} - \dot{\beta} \cos \alpha - \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \beta \\ \dot{\alpha} \cos \phi + \dot{\beta} \sin \alpha \sin \phi - \dot{\gamma} \sin \beta \cos \phi - \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \sin \phi \\ \dot{\alpha} \sin \phi - \dot{\beta} \sin \alpha \cos \phi - \dot{\gamma} \sin \beta \sin \phi + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

而在車輪的部份，因為車輪並沒有前傾角度  $\alpha$ ，但有自轉角度  $\theta$ ，故吾人可求得其方向餘弦矩陣  ${}^P C_W$  為

$$\begin{aligned}
{}^P C_W &= {}^P R_W^T \\
&= C_Z C_X C_{YY} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-51}$$

同理，吾人可得在體座標系上之車輪角速度

$$\bar{\omega}_w = \begin{bmatrix} \omega_{wx} \\ \omega_{wy} \\ \omega_{wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \cos \theta - \dot{\gamma} \sin \theta \cos \beta \\ \dot{\theta} - \dot{\gamma} \sin \beta \\ -\dot{\beta} \sin \theta + \dot{\gamma} \cos \theta \cos \beta \end{bmatrix} \tag{2-52}$$

接著將利用角速度來求得系統之旋轉動能，首先為車身旋轉動能之推導，吾人已知在體座標系上之車身轉動慣量可表示為

$$I_{bb} = \begin{bmatrix} I_{bx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{by} & 0 \\ 0 & 0 & I_{bz} \end{bmatrix} \tag{2-53}$$

其中  $I_{bx}$ 、 $I_{by}$ 、 $I_{bz}$  各為  $\hat{x}_c'''$ 、 $\hat{y}_c'''$ 、 $\hat{z}_c'''$  軸方向之轉動慣量，又知車身旋轉動能為

$$T_{b\_rotation} = \frac{1}{2} \bar{\omega}_b^T I_{bb} \bar{\omega}_b \tag{2-54}$$

由(2-47)式以及(2-53)式、(2-54)式，吾人可得車身旋轉動能為

$$\begin{aligned}
T_{b\_rotation} &= \frac{1}{2} \bar{\omega}_b^T I_{bb} \bar{\omega}_b \\
&= \left( \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta + \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 \cos^2 \alpha \right) I_{bx} \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \sin^2 \beta \right) I_{by} \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta + \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 \sin^2 \alpha \right) I_{bz}
\end{aligned} \tag{2-55}$$

同理，車輪在體座標系上之轉動慣量可表示為

$$I_{wb} = \begin{bmatrix} I_{wx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{wy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{wz} \end{bmatrix} \tag{2-56}$$

由(2-52)式以及(2-56)式可得車輪旋轉動能為

$$\begin{aligned}
T_{w\_rotation} &= \frac{1}{2} \bar{\omega}_w^T I_{wb} \bar{\omega}_w \\
&= \left( \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \beta + \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \theta \sin \theta \cos \beta + \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 \cos^2 \theta \right) I_{wx} \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \dot{\theta} \dot{\gamma} \sin \beta + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \sin^2 \beta \right) I_{wy} \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \beta - \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \theta \sin \theta \cos \beta + \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta \right) I_{wz}
\end{aligned} \tag{2-57}$$

轉盤在體座標系上之轉動慣量可表示為

$$I_{db} = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \tag{2-58}$$

由(2-50)式以及(2-58)式可得轉盤旋轉動能為

$$\begin{aligned}
T_{d\_rotation} &= \frac{1}{2} \bar{\omega}_d^T I_{db} \bar{\omega}_d \\
&= [-\dot{\phi} - \dot{\beta} \cos \alpha - \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \beta]^2 I_{dx} \\
&\quad + [\dot{\alpha} \cos \phi + \dot{\beta} \sin \alpha \sin \phi - \dot{\gamma} \sin \beta \cos \phi - \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \sin \phi]^2 I_{dy} \\
&\quad + [\dot{\alpha} \sin \phi - \dot{\beta} \sin \alpha \cos \phi - \dot{\gamma} \sin \beta \sin \phi + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \cos \phi]^2 I_{dz}
\end{aligned} \tag{2-59}$$

而系統的位能為：

$$\begin{aligned}
V &= m_w g r_{wz} + m_d g r_{dz} + m_b g r_{bz} \\
&= m_w g (l \cos \alpha \cos \beta) + m_d g [(\cos \alpha \cos \beta) l + l_r \cos \beta] + m_b g \left[ \frac{l}{2} \cos \alpha \cos \beta + l_r \cos \beta \right] \\
&= (m_w + m_d + m_b) g l_r \cos \beta + (m_d + \frac{1}{2} m_b) g l \cos \alpha \cos \beta
\end{aligned} \tag{2-60}$$

另外，在單輪車系統中，吾人假設輪子的滾動不會有滑動現象發生，故在此需加入輪子滾動的限制條件。吾人令  $\bar{V}_w$  為大地座標系上輪子位速度， $\bar{V}_{wc}$  為輪子與地面接觸點的速度， $\bar{\omega}_{wg}$  為輪子在大地座標系上之角速度。吾人知道上述之關係為

$$\bar{V}_w + \bar{\omega}_{wg} \times \bar{R}_w = \bar{V}_{wc} \tag{2-61}$$

若滾動運動為不滑動的條件下，(2-61)式必須為

$$\bar{V}_w + \bar{\omega}_{wg} \times \bar{R}_w = 0 \tag{2-62}$$

吾人令

$$\bar{V}_w = \dot{X}\hat{x} + \dot{Y}\hat{y} + \dot{Z}\hat{z} \tag{2-63}$$

並定義一個平行於輪盤上由輪子質心指向地面接觸點之單位向量  $\hat{i}_\theta$ ，如

圖 2-6。

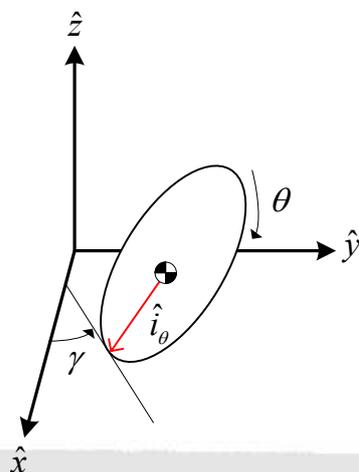


圖 2-6 輪子與地表接觸示意圖

吾人知道此單位向量在以輪子質心為原點之座標系  $(\hat{x}_c, \hat{y}_c, \hat{z}_c)$  上的位置  
 向量為  $[0, 0, -1]^T$ ，再根據座標軸轉換後，吾人可得此單位向量位於車上  
 座標系  $(\hat{x}_c, \hat{y}_c, \hat{z}_c)$  上可表示為

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \beta \sin \gamma \\ -\sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-64)$$

又由於車上座標系  $(\hat{x}_c, \hat{y}_c, \hat{z}_c)$  與大地座標系  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  並無旋轉關係，故可  
 得單位向量  $\hat{i}_\theta$  在大地座標系  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  上可表示為

$$\hat{i}_\theta = \sin \beta \sin \gamma \hat{x} - \sin \beta \cos \gamma \hat{y} - \cos \beta \hat{z} \quad (2-65)$$

首先吾人求得大地座標系上之車輪角速度，已知大地座標系上的角速度與方向餘弦矩陣的關係式[18]為(2-66)式，其中 ${}^P C_W$ 為(2-51)式所得

$$\omega_{wzg} = {}^P \dot{C}_W {}^P C_W^T \quad (2-66)$$

計算後再與角速度矩陣比較可得在大地座標系上之輪子角速度

$$\bar{\omega}_{wg} = \begin{bmatrix} \omega_{wxg} \\ \omega_{wyg} \\ \omega_{wzg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \cos \gamma - \dot{\theta} \cos \beta \sin \gamma \\ -\dot{\beta} \sin \gamma + \dot{\theta} \cos \beta \cos \gamma \\ \dot{\gamma} - \dot{\theta} \sin \beta \end{bmatrix} \quad (2-67)$$

由(2-65)式以及(2-67)式之條件，又 $\bar{R}_w = l_r \cdot \hat{i}_\theta$ ，吾人可得到

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{wg} \times \bar{R}_w &= \bar{\omega}_{wg} \times l_r \hat{i}_\theta \\ &= -\omega_{wxg} \cdot l_r \sin \beta \cos \gamma \hat{z} - \omega_{wyg} \cdot l_r \sin \beta \sin \gamma \hat{z} \\ &\quad + \omega_{wxg} \cdot l_r \cos \beta \hat{y} + \omega_{wzg} \cdot l_r \sin \beta \sin \gamma \hat{y} \\ &\quad - \omega_{wyg} \cdot l_r \cos \beta \hat{x} + \omega_{wzg} \cdot l_r \sin \beta \cos \gamma \hat{x} \\ &= (-l_r \dot{\theta} \cos \gamma + l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma + l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma) \hat{x} \\ &\quad + (-l_r \dot{\theta} \sin \gamma - l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma + l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma) \hat{y} \\ &\quad + (l_r \dot{\beta} \sin \beta) \hat{z} \end{aligned} \quad (2-68)$$

又將(2-68)式代入(2-62)式中，再與(2-63)式比較，吾人可得

$$\begin{aligned} \dot{X} &= l_r \dot{\theta} \cos \gamma - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma \\ \dot{Y} &= l_r \dot{\theta} \sin \gamma + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma \\ \dot{Z} &= -l_r \dot{\beta} \sin \beta \end{aligned} \quad (2-69)$$

接著將(2-69)式與先前所求得之輪子質心位移速度(2-27)式、(2-28)式、

(2-29)式比較，吾人可得

$$\begin{aligned}\dot{X} = \dot{r}_{wx} &= \dot{x} - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma \\ \dot{Y} = \dot{r}_{wy} &= \dot{y} + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma \\ \dot{Z} = \dot{r}_{wz} &= -l_r \dot{\beta} \sin \beta\end{aligned}\quad (2-70)$$

整理可得輪子的滾動條件為

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l_r \dot{\theta} \cos \gamma \\ \dot{y} &= l_r \dot{\theta} \sin \gamma\end{aligned}\quad (2-71)$$

除了以上述方式求得滾動條件外，也可用切線速度與分量的關係求得輪子滾動條件。由圖 2-7 可知瞬時切線速度  $\hat{v}_w$  為

$$\begin{aligned}\hat{v}_w &= \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \\ &= (l_r \dot{\theta} \cos \gamma)\hat{x} + (l_r \dot{\theta} \sin \gamma)\hat{y}\end{aligned}\quad (2-72)$$

並由(2-72)式可得與(2-71)式相同之輪子滾動條件。

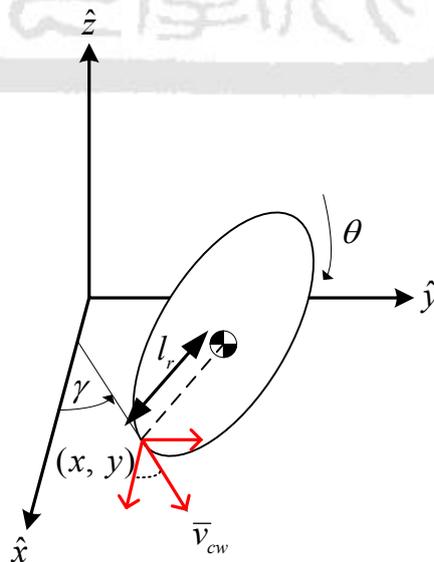


圖 2-7 輪子切線速度分解示意圖

再將(2-71)式代入(2-36)式、(2-37)式以及(2-38)式，吾人可將系統之位移動能表示為

$$T_{w\_moving} = \frac{1}{2} m_w [(l_r \dot{\theta} \cos \gamma - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma)^2 + (l_r \dot{\theta} \sin \gamma + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma)^2 + (l_r^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \beta)] \quad (2-73)$$

$$T_{d\_moving} = \frac{1}{2} m_d \{ [(\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \gamma - \dot{\gamma} \sin \alpha \sin \gamma + \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma)l + l_r \dot{\theta} \cos \gamma - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma]^2 + [(\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \gamma + \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \gamma + \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma)l + l_r \dot{\theta} \sin \gamma + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma]^2 + (-l \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - l \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta - l_r \dot{\beta} \sin \beta)^2 \} \quad (2-74)$$

$$T_{b\_moving} = \frac{1}{2} m_b \{ \left[ \frac{1}{2} (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \gamma - \dot{\gamma} \sin \alpha \sin \gamma + \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma)l + l_r \dot{\theta} \cos \gamma - l_r \dot{\beta} \cos \beta \sin \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \cos \gamma \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} (\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \gamma + \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \gamma + \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma)l + l_r \dot{\theta} \sin \gamma + l_r \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma - l_r \dot{\gamma} \sin \beta \sin \gamma \right]^2 + \left( -\frac{l}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - \frac{l}{2} \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta - l_r \dot{\beta} \sin \beta \right)^2 \} \quad (2-75)$$

接下來將使用 Euler-Lagrange method 以求得系統的數學動態模型，其中 Euler-Lagrange Equation 如下：

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (2-76)$$

各變數定義為：

$L$  :  $L = T - V$  (Lagrange function)

$T$  : 動能 (kinetic energy)

$V$  : 位能 (potential energy)

$Q$  : 廣義力 (generalized forces)

$q$  : 廣義座標 (generalized coordinates)

本系統之  $q$  與  $Q$  分別為

$$q = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_d \\ \tau_w \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

其中  $\tau_w$  為施於車輪的力矩， $\tau_d$  為施於轉盤的力矩。經過上述之定義及分析推導，吾人可由(2-55)式、(2-57)式、(2-59)式、(2-60)式、(2-73)式、(2-74)式、(2-75)式得 Lagrange function  $L$ 。最後將  $L$  代入以下 Lagrange equations：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \gamma} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \tau_d \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \tau_w \end{aligned} \quad (2-78)$$

計算後可得單輪車系統之五條 Lagrange equations，由於式子過於龐大且複雜，故將系統完整的動態方程式放在本論文之附錄 A 中，在此將系統之動態精簡表示為一典型的機械系統如下

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (2-79)$$

其中  $M \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  為慣性矩陣(inertia matrix)， $V \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  為科氏矩陣(coriolis matrix)， $G \in \mathbb{R}^5$  為重力項(gravity term)， $\tau \in \mathbb{R}^5$  為馬達輸出力矩， $q \in \mathbb{R}^5$  為系統角度狀態。

為了驗證單輪車系統動態方程式之正確性，吾人利用 MATLAB/Simulink 來模擬單輪車系統之數學模型，觀察其是否符合物理現象，以驗證其正確性。吾人將單輪車系統以 MATLAB/Simulink 建構系統方塊圖，將系統的輸入力設為零，並將單輪車的初始位置設定為  $(\alpha, \beta, \gamma, \phi, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = (0.05, 0.05, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ，其物理意義為單輪車系統向前傾斜 0.05 徑度，向左傾斜 0.05 徑度。

經過 MATLAB/Simulink 進行模擬後，單輪車前後傾角的模擬響應圖如圖 2-8 所示，單輪車左右傾角的模擬響應圖如圖 2-9 所示，單輪車偏向角的模擬響應圖如圖 2-10 所示，由模擬的結果可發現，當系統在偏離平衡點且無控制力的情況下，傾斜的角度將逐漸偏離平衡點且最後將會倒下，而單輪車偏向角度也會隨著系統的傾倒而改變，此運動模擬響應圖與實際物理現象相符合，故可驗證吾人前述所推導之數學模型的正確性。

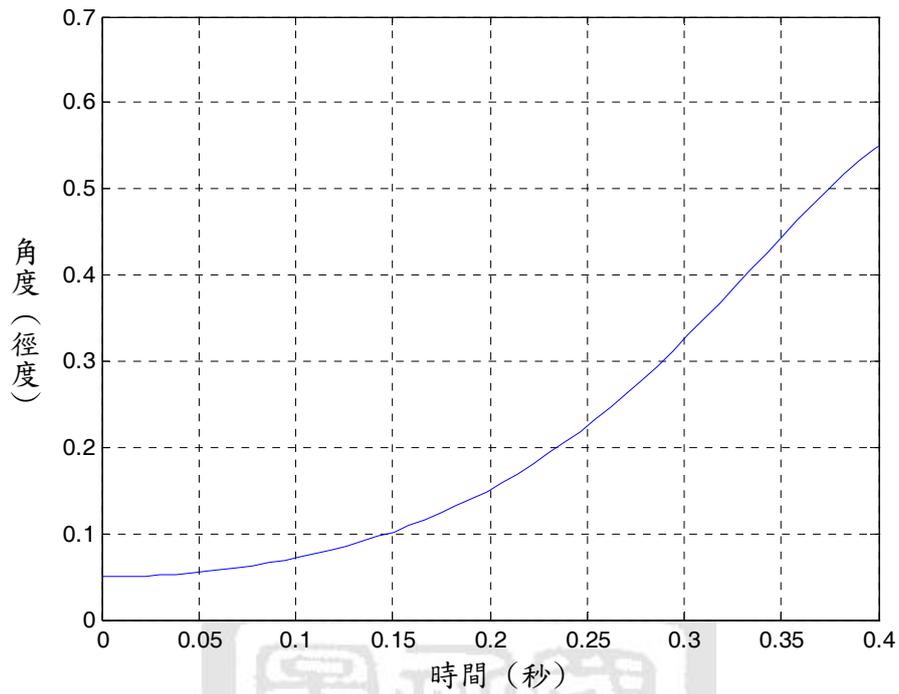


圖 2-8 單輪車前傾角響應圖

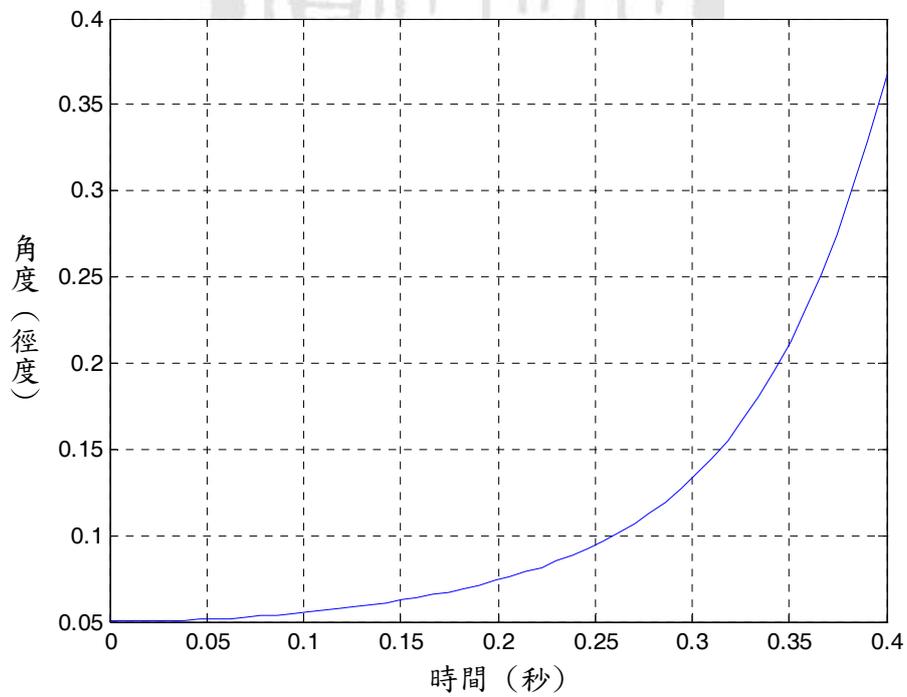


圖 2-9 單輪車左右傾角響應圖

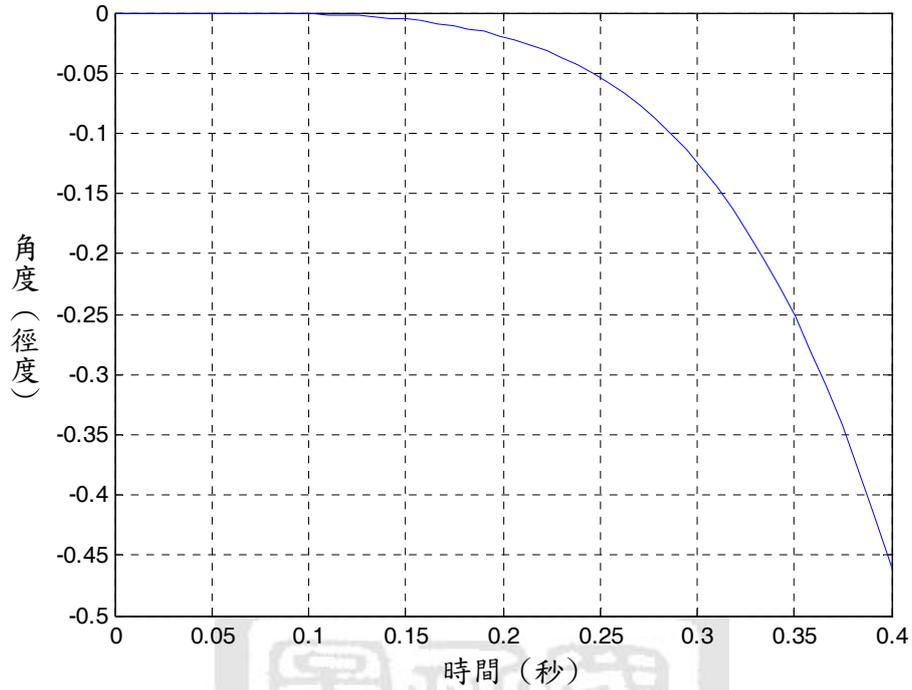


圖 2-10 單輪車偏向角響應圖

因為單輪車系統之動態方程式為高度非線性且方程式過於龐大且複雜，吾人很難從中窺見其主要影響系統的動態部份，故在此吾人先嘗試將單輪車系統動態方程式進行平衡點線性化，以得到靠近平衡點時之系統動態數學模型，經過平衡點線性化後之單輪車系統動態方程式如下所示：

$$m_d[l^2\ddot{\alpha} + ll_{rad}\ddot{\theta} - gl\alpha] + m_b[\frac{1}{4}l^2\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}ll_{rad}\ddot{\theta} - \frac{1}{2}gl\alpha] + I_{dy}[\ddot{\alpha}] + I_{by}[\ddot{\alpha}] = 0 \quad (2-80)$$

$$m_w[l_r^2\ddot{\beta} - gl_r\beta] + m_d[l_r^2\ddot{\beta} + l^2\ddot{\beta} + 2ll_r\ddot{\beta} - gl_r\beta - gl\beta] + m_b[l_r^2\ddot{\beta} + \frac{1}{4}l^2\ddot{\beta} + ll_r\ddot{\beta} - gl_r\beta - \frac{1}{2}gl\beta] + I_{wx}[\ddot{\beta}] + I_{dx}[\ddot{\beta} + \ddot{\phi}] + I_{bx}[\ddot{\beta}] = 0 \quad (2-81)$$

$$I_{wz}[\ddot{\gamma}] + I_{dz}[\ddot{\gamma}] + I_{bz}[\ddot{\gamma}] = 0 \quad (2-82)$$

$$I_{dx}[\ddot{\beta} + \ddot{\phi}] = \tau_d \quad (2-83)$$

$$m_w[l_r^2\ddot{\theta}] + m_d[ll_r\ddot{\alpha} + l_r^2\ddot{\theta}] + m_b[\frac{1}{2}ll_r\ddot{\alpha} + l_r^2\ddot{\theta}] + I_{wy}[\ddot{\theta}] = \tau_w \quad (2-84)$$

經平衡點線性化後，可發現與前後方向變數  $\alpha$  和  $\theta$  相關的(2-80)式、(2-84)式與左右方向變數  $\beta$  和  $\phi$  相關的(2-81)式、(2-83)式與偏向角度相關  $\gamma$  的(2-82)式彼此獨立不相關，因此，吾人知道在接近平衡點時候，可忽略偏向角度  $\gamma$  的影響，將系統解耦合為左右方向 ( $\beta, \phi$ ) 以及前後方向 ( $\alpha, \theta$ ) 之子系統。

首先考慮左右方向之子系統，吾人從單輪車之動態方程式中取出與左右平衡有關聯性之非線性動態方程式，並將狀態設為  $\alpha = \gamma = \theta = 0$  再加以整理後可得下式

$$(m_w l_r^2 + m_d l_r^2 + m_d l^2 + 2m_d ll_r + m_b l_r^2 + \frac{1}{4}m_b l^2 + m_b ll_r + I_{wx} + I_{dx} + I_{bx})\ddot{\beta} + (I_{dx})\ddot{\phi} - (m_w gl_r + m_d gl_r + m_d gl + m_b gl_r + m_b \frac{1}{2} gl)\sin \beta = 0 \quad (2-85)$$

$$I_{dx}[\ddot{\beta} + \ddot{\phi}] = \tau_d \quad (2-86)$$

因為單輪車單純考慮左右動態時，其機械物理結構與慣性輪倒單擺系統非常相似，故接下來吾人將對(2-85)、(2-86)式與本實驗室 93 級學長凌朝雄碩士論文「慣性輪單擺系統」[16]之系統動態數學模型作一比較，以驗證是否可以將單輪車系統的左右動態視為一個慣性輪倒單擺系統。

首先將簡單說明慣性輪倒單擺系統之相關參數定義以及其系統示意圖如圖 2-11 所示。

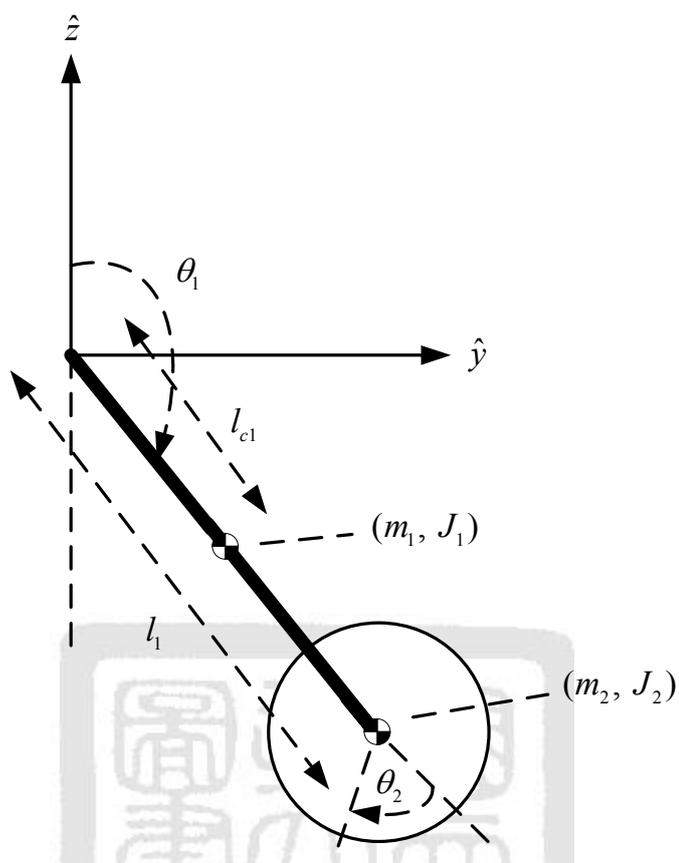


圖 2-11 慣性輪單擺示意圖

圖中的系統參數為

$\theta_1$ : 單擺的擺動角度(rad)

$\theta_2$ : 轉盤的旋轉角度(rad)

$m_1$ : 單擺的質量(kg)

$m_2$ : 轉盤的質量(kg)

$J_1$ : 單擺繞  $\hat{x}$  軸的轉動慣量(kg·m<sup>2</sup>)

$J_2$ : 轉盤繞  $\hat{x}$  軸的轉動慣量(kg·m<sup>2</sup>)

$l_{c1}$ : 單擺質心到端點的長度(m)

$l_1$ :轉盤質心到端點的長度(m)

慣性輪動態方程式如下：

$$(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + J_1 + J_2) \ddot{\theta}_1 + J_2 \ddot{\theta}_2 + (-m_1 l_{c1} g - m_2 l_1 g) \sin \theta_1 = 0 \quad (2-87)$$

$$J_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = \tau_d \quad (2-88)$$

吾人發現(2-85)式、(2-86)式與慣性輪倒單擺動態方程式(2-87)式、(2-88)式彼此形式契合，因此我們得知單輪車系統在接近平衡點的狀況下，可將單輪車之左右方向動態視為慣性輪倒單擺系統。

接著考慮前後方向之系統，吾人從單輪車之動態方程式中取出與前後方向有關聯性之非線性動態方程式，並將狀態設為  $\beta = \gamma = \phi = 0$  再加以整理後可得下兩式

$$(m_d l^2 + \frac{1}{4} m_b l^2 + I_{dy} + I_{by}) \ddot{\alpha} + (m_d l l_{rad} \cos \alpha + \frac{1}{2} m_b l l_{rad} \cos \alpha) \ddot{\theta} - (m_d g l \sin \alpha + \frac{1}{2} m_b g l \sin \alpha) = 0 \quad (2-89)$$

$$(m_d l l_r \cos \alpha + \frac{1}{2} m_b l l_r \cos \alpha) \ddot{\alpha} + (m_w l_r^2 + m_d l_r^2 + m_b l_r^2 + I_{wy}) \ddot{\theta} - (m_d l l_r \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + m_b \frac{1}{2} l l_r \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = \tau_w \quad (2-90)$$

由上述左右方向的比較結果，吾人可知當只考慮前後方向動態時，單輪車系統可視為一輪型倒單擺，故接下來，吾人首先將以 Euler-Lagrange method 推導輪型倒單擺系統，而輪型倒單擺系統示意圖如圖 2-12。

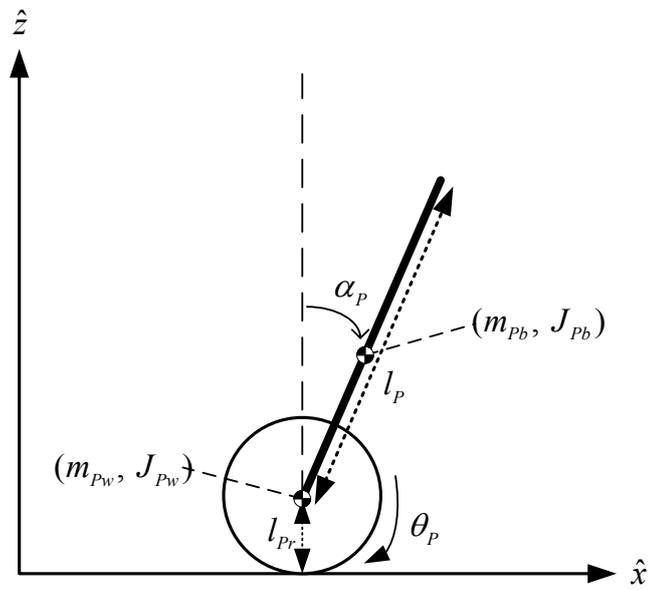


圖 2-12 輪型倒單擺系統示意圖

$m_{pw}$  : 輪子質量

$J_{pw}$  : 輪子繞  $\hat{y}$  軸的轉動慣量

$m_{pb}$  : 單擺質量

$J_{pb}$  : 單擺繞  $\hat{y}$  軸的轉動慣量

$\alpha_p$  : 單擺傾倒角

$\theta_p$  : 輪子轉動角度

$l_p$  : 單擺長度

$l_{Pr}$  : 輪子半徑

並定義

$$q_p = \begin{bmatrix} \alpha_p \\ \theta_p \end{bmatrix} ; Q_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{pw} \end{bmatrix} \quad (2-91)$$

由系統示意圖我們可得輪子位置向量為

$$\bar{r}_{Pw} = \begin{bmatrix} r_{Pwx} \\ r_{Pwy} \\ r_{Pwz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{Pr} \theta_P \\ 0 \\ l_{Pr} \end{bmatrix} \quad (2-92)$$

吾人假設單擺質心位於  $\frac{l_P}{2}$  處，故可得單擺之位置向量為

$$\bar{r}_{Pb} = \begin{bmatrix} r_{Pbx} \\ r_{Pby} \\ r_{Pbz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{Pr} \theta_P + \frac{l_P}{2} \sin \alpha_P \\ 0 \\ l_{Pr} + \frac{l_P}{2} \cos \alpha_P \end{bmatrix} \quad (2-93)$$

並將位置向量微分得到速度向量

$$\dot{\bar{r}}_{Pw} = \begin{bmatrix} \dot{r}_{Pwx} \\ \dot{r}_{Pwy} \\ \dot{r}_{Pwz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{Pr} \dot{\theta}_P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-94)$$

$$\dot{\bar{r}}_{Pb} = \begin{bmatrix} \dot{r}_{Pbx} \\ \dot{r}_{Pby} \\ \dot{r}_{Pbz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{Pr} \dot{\theta}_P + \frac{l_P}{2} \dot{\alpha}_P \cos \alpha_P \\ 0 \\ -\frac{l_P}{2} \dot{\alpha}_P \sin \alpha_P \end{bmatrix} \quad (2-95)$$

求得系統動能  $T$  為

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_{Pw} (l_{Pr} \dot{\theta}_P)^2 + \frac{1}{2} m_{Pb} (l_{Pr} \dot{\theta}_P + \frac{l_P}{2} \dot{\alpha}_P \cos \alpha_P)^2 + \frac{1}{2} m_{Pb} (-\frac{l_P}{2} \dot{\alpha}_P \sin \alpha_P)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} J_{Pw} \dot{\theta}_P^2 + \frac{1}{2} J_{Pb} \dot{\alpha}_P^2 \end{aligned} \quad (2-96)$$

系統位能

$$V = gm_{pw}l_{pr} + gm_{pb}(l_{pr} + \frac{l_p}{2} \cos \alpha_p) \quad (2-97)$$

接下來將使用 Euler-Lagrange method 以求得系統的數學動態模型，其中 Euler-Lagrange Equation 如(2-76)式。最後得到輪型倒單擺之系統動態方程式如下。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_{pb}l_pl_{pr}\ddot{\theta}_p \cos \alpha_p + \frac{1}{4}m_{pb}l_p^2\ddot{\alpha}_p + J_{pb}\ddot{\alpha}_p - \frac{1}{2}gm_{pb}l_p \sin \alpha_p &= 0 \\ m_{pw}l_{pr}^2\ddot{\theta}_p + m_{pb}l_{pr}^2\ddot{\theta}_p + \frac{1}{2}m_{pb}l_pl_{pr}\ddot{\alpha}_p \cos \alpha_p - \frac{1}{2}m_{pb}l_pl_{pr}\dot{\alpha}_p^2 \sin \alpha_p + J_{pw}\ddot{\theta}_p &= \tau_{pw} \end{aligned} \quad (2-98)$$

吾人將輪型倒單擺之動態方程式(2-98)式與(2-89)、(2-90)式比較後，發現其方程式型態契合，故單輪車系統在接近平衡點時，前後方向動態確實可視為一輪型倒單擺系統。

經過上述之推導，吾人發現單輪車系統在接近平衡點時，在不考慮偏向角  $\gamma$  的情況下，可將單輪車系統動態解耦合為獨立的左右方向的慣性輪倒單擺系統以及前後方向的輪型倒單擺系統。

### 2-3 永磁式直流馬達數學模型之建立與參數鑑別

永磁式直流馬達具近似線性之特性，為控制系統中常被使用的致動器之一，它是一種將電器能量轉換為機械能量的裝置，依據其結構，可分成電氣與機械兩個部份，其中，電氣部分之等效電路由電阻、電感與理想的電樞等組成，旋轉電樞導體在磁場切割下產生反電動勢；機械部份為結合永磁式直流馬達與負載，透過二者的組合，達到帶動皮帶輪組使車輪滾動以及帶動轉盤的轉動。直流馬達示意圖如圖 2-9 所示，其各項參數符號定義如表 2-1 所列

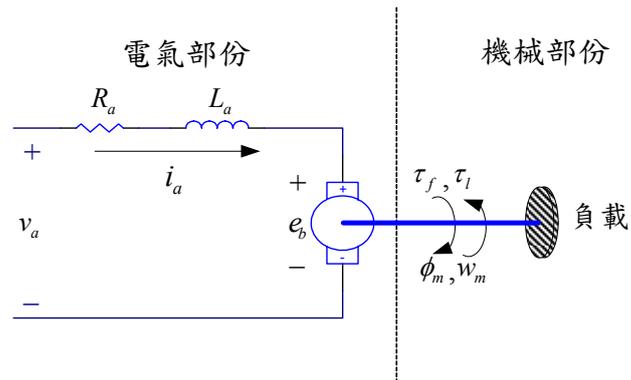


圖 2-13 直流馬達等效電路與負載

表 2-1 直流馬達參數符號定義

符 號	單 位	說 明
$R_a$	$\Omega$	電樞電阻
$L_a$	H	電樞電感
$i_a$	A	電樞電流
$K_b$	V/(rad/sec)	反電動勢常數
$K_t$	N-m/A	力矩常數
$J_m$	kg-m <sup>2</sup>	轉子慣性矩
$C_m$	N-m/(rad/sec)	黏滯阻尼係數
$\tau_m$	N-m	馬達輸出力矩
$\omega_m$	rad/sec	轉子角速度
$\phi_m$	rad	轉子旋轉角度
$\tau_f$	N-m	庫侖摩擦力矩
$\tau_l$	N-m	負載轉矩
$e_b$	V	反電動勢
$v_a$	V	輸入電壓

電氣部份：

由圖 2-13 等效電路可求出電壓方程式：

$$\begin{aligned}v_a &= L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b \quad (\because e_b = K_b \omega_m) \\ &= L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \omega_m\end{aligned}\quad (2-99)$$

機械部份：

由機械結構可求出馬達力矩方程式：

$$\begin{aligned}J_m \frac{d\omega_m}{dt} &= \tau_m - \tau_f - C_m \omega_m - \tau_l \quad (\because \tau_m = K_t i_a) \\ &= K_t i_a - \tau_f - C_m \omega_m - \tau_l\end{aligned}\quad (2-100)$$

系統轉子電功率：

$$p_e = e_b i_a \quad (2-101)$$

系統轉子的機械功率：

$$p_m = \tau_m \omega_m \quad (2-102)$$

在固定電樞電流及負載下，轉子電功率等於轉子機械功率，則

$$\begin{aligned}p_e &= p_m \\ e_b i_a &= \tau_m \omega_m \\ K_b \omega_m i_a &= K_t i_a \omega_m\end{aligned}\quad (2-103)$$

故得

$$K_b = K_t \quad (2-104)$$

當  $K_b$  與  $K_t$  單位皆採用 MKS 制，亦即  $K_b$  的單位為  $V/(\text{rad}/\text{sec})$ ， $K_t$  的單位為  $\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$ ，則  $K_b$  與  $K_t$  的數值相等。將(2-99)式與(2-100)式經由拉氏轉換可得 Laplace Transform：

$$(L_a s + R_a) \cdot I_a(s) + K_b \cdot \Omega_m(s) = V_a(s) \quad (2-105)$$

$$K_t \cdot I_a(s) - (J_m s + C_m) \cdot \Omega_m(s) = T_f(s) + T_l(s) \quad (2-106)$$

假設庫侖摩擦力矩  $\tau_f$  為一定值：

$$\tau_f = K_f \text{sgn}(\omega_m) \quad (2-107)$$

其中

$$\text{sgn}(\omega_m) = \begin{cases} 1, & \omega_m > 0 \\ 0, & \omega_m = 0 \\ -1, & \omega_m < 0 \end{cases} \quad (2-108)$$

$K_f$  為一個常數且  $K_f > 0$ ，因此  $K_f$  為一個大於零的常數。最後結合(2-105)、(2-106)、(2-107)式，可得直流馬達系統方塊，如圖 2-14 所示。

本論文中所使用之兩顆直流馬達額定最大輸出功率為 150 W，額定最大輸入電壓為 24 V，最高輸出轉速為 7580 rpm。為了得到馬達動態方程式中的各項參數，吾人使用修正行 ARMA 識別方法，其參數識別的方法及過程請參閱本實驗室歷屆論文[20]，在此不多加贅述。表 2-2 為本論文使用之兩顆馬達經上述方式識別後所得知的各參數數值。

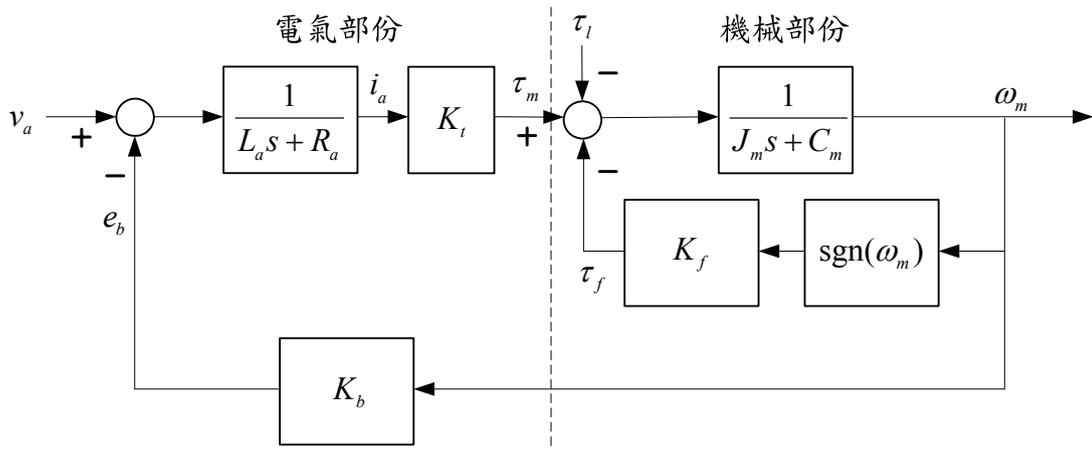


圖 2-14 直流馬達系統方塊圖

表 2-2 兩軸直流馬達參數表  
帶動車輪的直流馬達參數表

參數	數值	單位	參數	數值	單位
$L_a$	0.0039	H	$ \tau_f $	0.00324	N-m
$K_b$	0.02932	V/rad/sec	$J_m$	$2.0214 \times 10^{-5}$	kg-m <sup>2</sup>
$R_a$	0.98308	$\Omega$	$C_m$	$1.5256 \times 10^{-6}$	N-m/rad/sec

帶動轉盤的直流馬達參數表

參數	數值	單位	參數	數值	單位
$L_a$	0.00223	H	$ \tau_f $	$8.7761 \times 10^{-4}$	N-m
$K_b$	0.02908	V/rad/sec	$J_m$	$5.5404 \times 10^{-5}$	kg-m <sup>2</sup>
$R_a$	0.37713	$\Omega$	$C_m$	$6.9804 \times 10^{-5}$	N-m/rad/sec

為了驗證識別後的馬達參數模型是否準確，吾人分別輸入 10 個不同

頻率的弦波訊號作為馬達輸入電壓，同時量測在 10 個不同頻率弦波輸入下的馬達輸出轉速，透過這些資料便可繪製馬達之波德圖(Bode plot)如圖 2-15 與圖 2-16 所示，由圖可得知參數識別後與實際馬達差異不大。

此外，因馬達的輸入電壓可能會與庫倫摩擦力矩  $\tau_f$  有關，為探討模型中摩擦力矩  $\tau_f$  對系統之影響，本論文分別使用振幅為 5 V、10 V、15 V 的弦波輸入電壓，分別量測並繪出永磁式直流馬達的波德圖，如 2-17 所示。由圖 2-17 可知，每組不同的輸入電壓所得到的波德圖都相當接近，由此可知，庫倫摩擦力矩  $\tau_f$  對於馬達動態所造成的影響並不大，所以吾人將庫倫摩擦力矩  $\tau_f$  忽略是可以接受的。

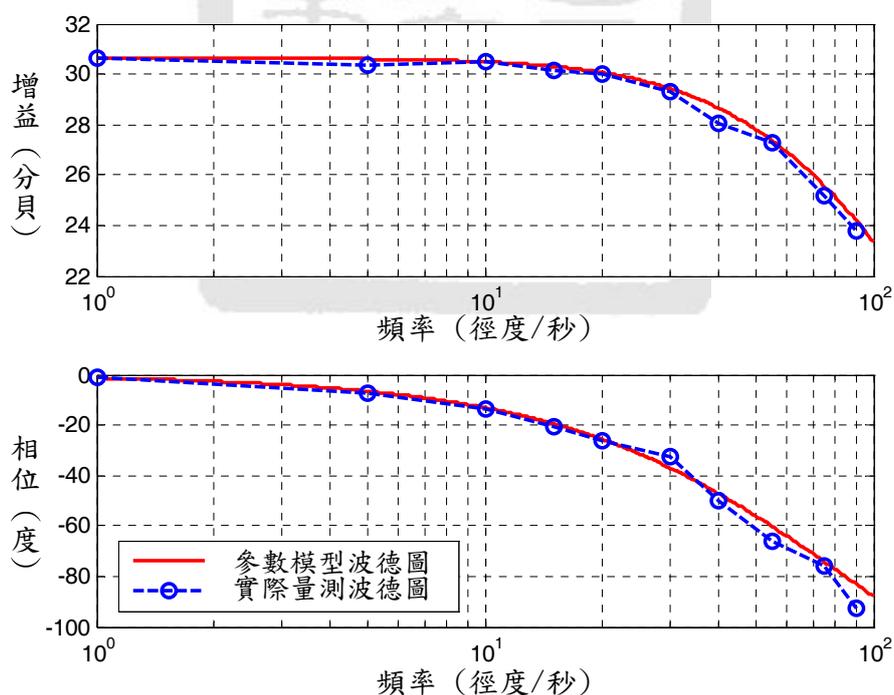


圖 2-15 實際帶動車輪的馬達量測波德圖與參數模型波德圖比較

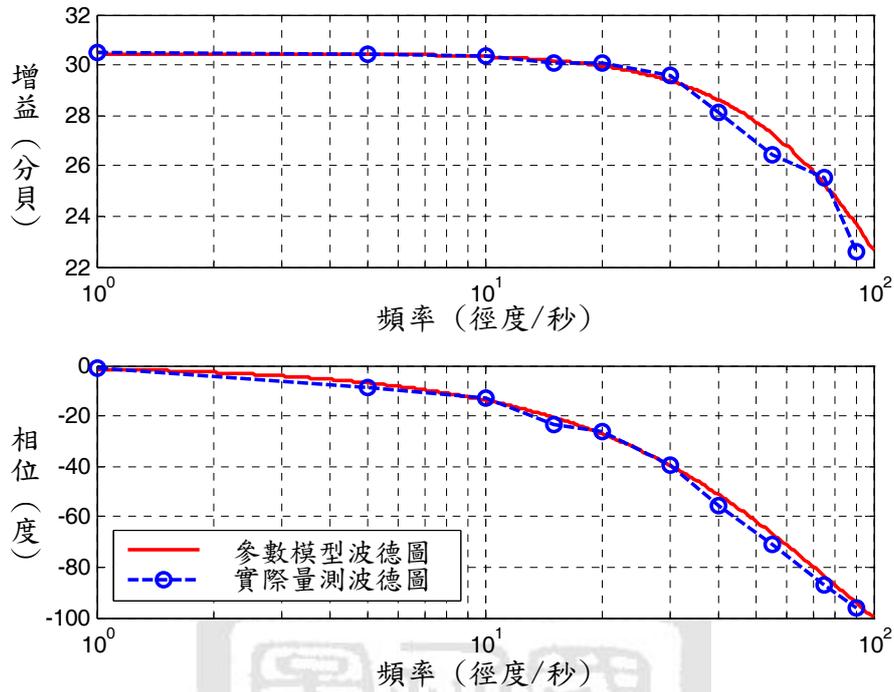


圖 2-16 實際帶動轉盤的馬達量測波德圖與參數模型波德圖比較

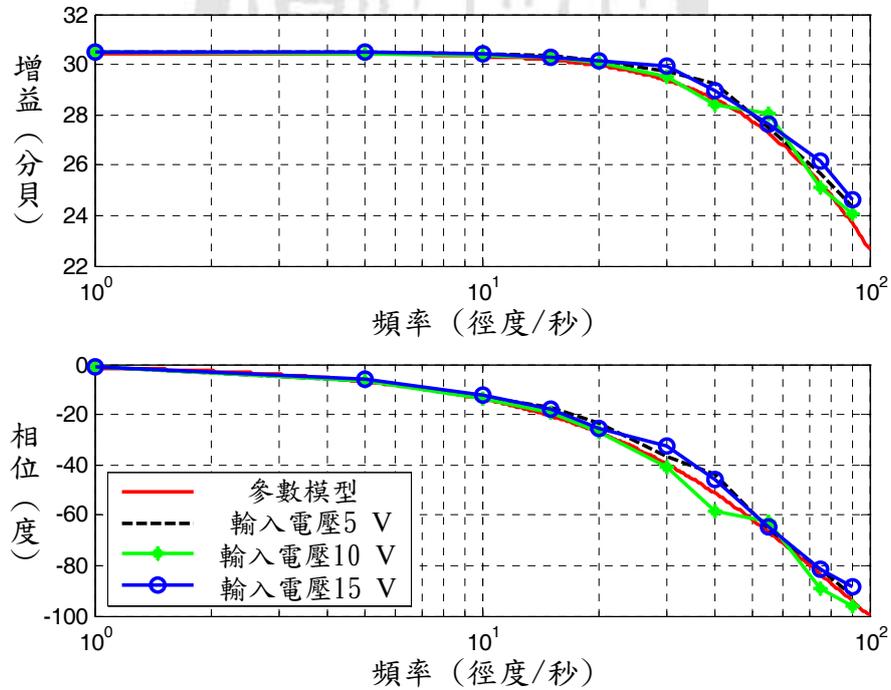


圖 2-17 不同輸入電壓之實際量測永磁式直流馬達波德圖

## 2-4 單輪車系統整體數學模型

在考慮直流馬達穩態模型時，由於系統穩態時的  $\frac{di_a(t)}{dt}$  不大且由表 2-2 可知電樞電感  $L_a$  很小，使得  $L_a \frac{di_a(t)}{dt} \ll R_a i_a + K_b \omega_m$ 。同時系統於穩態時  $\frac{d\omega_m(t)}{dt}$  不大，由表 2-2 可知馬達轉子慣性矩  $J_m$ 、黏滯阻尼係數  $C_m$  皆很小。由圖 2-17 證明了庫倫摩擦力矩  $\tau_f$  對馬達動態影響不大，且  $K_t i_a \gg J_m \frac{d\omega_m}{dt} + C_m \omega_m + \tau_f$ ，故可將  $J_m$ 、 $\tau_f$  及  $C_m$  忽略，最後可得簡化後之直流馬達的動態方程式如下所示：

$$\begin{aligned} e &= i_a \cdot R_a + K_b \omega_m \\ \tau_m &= K_t \cdot i_a \end{aligned} \quad (2-109)$$

再由(2-103)式，可將(2-109)式整理為

$$\tau_m = \frac{K_t}{R_a} e - \frac{K_t^2}{R_a} \omega_m \quad (2-110)$$

故(2-110)式為直流馬達輸出轉矩(torque)、輸入電壓及輸出角速度之關係式，且由先前馬達參數識別的部份可得知兩組馬達參數差異性不大，故吾人在此將兩組馬達參數視為相同，而其參數為將兩組馬達參數取平均所得。又馬達跟轉盤連結時  $\tau_m = \tau_d$ 、 $\omega_m = \dot{\phi}$ ，故可得

$$\tau_d = \frac{K_t}{R_a} e_d - \frac{K_t^2}{R_a} \dot{\phi} \quad (2-111)$$

馬達經皮帶輪組與車輪連結時，因為轉動方向相同，皮帶輪比為 1:1，

且  $\tau_m = \tau_w$ 、 $\omega_m = \dot{\theta}$ ，故可得

$$\tau_w = \frac{K_t}{R_a} e_w - \frac{K_t^2}{R_a} \dot{\theta} \quad (2-112)$$

因為完整之單輪車數學模型過於龐大複雜，無法直接看出馬達與單輪車之間互相影響之關係，故在此吾人以線性化後之單輪車數學模型(2-80)式、(2-81)式、(2-82)式、(2-83)式、(2-84)式與馬達數學模型(2-111)式、(2-112)式做結合，並將之整理成

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2-113)$$

並定義狀態變數為

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10}]^T = [\alpha \ \theta \ \gamma \ \beta \ \phi \ \dot{\alpha} \ \dot{\theta} \ \dot{\gamma} \ \dot{\beta} \ \dot{\phi}]^T \quad (2-114)$$

經整理可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \\ \gamma \\ \beta \\ \phi \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} e_w \\ e_d \end{bmatrix} \quad (2-115)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(M_3 + I_{yy})P_1}{\Delta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M_2 \cdot K_t^2}{\Delta_1 \cdot R_a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_2 P_1}{\Delta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(M_1 + I_{dy} + I_{by}) \cdot K_t^2}{\Delta_1 \cdot R_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(P_1 + P_2)}{\Delta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 \cdot K_t^2}{\Delta_2 \cdot R_a} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(P_1 + P_2)}{\Delta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\Delta_2 + I_{dx}}{I_{dx} \Delta_2} \cdot \frac{K_t^2}{R_a} \end{bmatrix} \quad (2-116)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{M_2 \cdot K_t}{\Delta_1 \cdot R_a} & 0 \\ \frac{(M_1 + I_{dy} + I_{by}) \cdot K_t}{\Delta_1 \cdot R_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1 \cdot K_t}{\Delta_2 \cdot R_a} \\ 0 & \frac{\Delta_2 + I_{dx}}{I_{dx} \Delta_2} \cdot \frac{K_t}{R_a} \end{bmatrix} \quad (2-117)$$

$$M_1 = m_a l^2 + \frac{1}{4} m_b l^2 \quad (2-118)$$

$$M_2 = m_d ll_r + \frac{1}{2} m_b ll_r \quad (2-119)$$

$$M_3 = m_w l_r^2 + m_d l_r^2 + m_b l_r^2 \quad (2-120)$$

$$P_1 = gm_d l + \frac{1}{2} gm_b l \quad (2-121)$$

$$P_2 = gm_w l_r + gm_d l_r + gm_b l_r \quad (2-122)$$

$$\Delta_2 = M_1 + 2M_2 + M_3 + I_{wx} + I_{bx} \quad (2-123)$$

$$\Delta_1 = M_1 M_3 + M_3 I_{dy} + M_3 I_{by} + M_1 I_{wy} + I_{wy} I_{dy} + I_{wy} I_{by} - M_2^2 \quad (2-124)$$

由(2-115)式子可得知偏向角度  $\gamma$  在平衡點時，與馬達無關且不影響其他狀態，並由 2-2 節可知單輪車系統在平衡點時，忽略偏向角即可視為慣性輪系統與輪型倒單擺系統之結合。故接下來吾人將單輪車系統分別表示為兩子系統，以便平衡控制器之設計。首先將(2-111)式代入(2-86)式即可得經解耦合成慣性輪倒單擺系統後的整個系統動態方程式如下：

慣性輪倒單擺：

$$(m_w l_r^2 + m_d l_r^2 + m_d l^2 + 2m_d ll_r + m_b l_r^2 + \frac{1}{4} m_b l^2 + m_b ll_r + I_{wx} + I_{dx} + I_{bx}) \ddot{\beta} + (I_{dx}) \ddot{\phi} - (m_w gl_r + m_d gl_r + m_d gl + m_b gl_r + m_b \frac{1}{2} gl) \sin \beta = 0 \quad (2-125)$$

$$I_{dx} [\ddot{\beta} + \ddot{\phi}] + \frac{K_t^2}{R_a} \dot{\phi} = \frac{K_t}{R_a} e_d \quad (2-126)$$

並定義狀態空間

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = [\beta \quad \dot{\beta} \quad \phi \quad \dot{\phi}]^T \quad (2-127)$$

由(2-125)式、(2-126)式、(2-127)式整理可得

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2-128)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{G_d \sin(x_1)}{D - I_{dx}} + \frac{R_m K_t x_4}{D - I_{dx}} - \frac{R_m e_d}{D - I_{dx}} \quad (2-129)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2-130)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{G_d \sin(x_1)}{D - I_{dx}} - \frac{DR_m K_t x_4}{I_{dx}(D - I_{dx})} + \frac{DR_m e_d}{I_{dx}(D - I_{dx})} \quad (2-131)$$

其中

$$D = m_w l_r^2 + m_d l_r^2 + m_d l^2 + 2m_d l l_r + m_b l_r^2 + \frac{1}{4} m_b l^2 + m_b l l_r + I_{wx} + I_{dx} + I_{bx} \quad (2-132)$$

$$G_d = m_w g l_r + m_d g l_r + m_d g l + m_b g l_r + m_b \frac{1}{2} g l \quad (2-133)$$

$$R_m = \frac{K_t}{R_a} \quad (2-134)$$

同理，將(2-112)式代入(2-90)式可得單輪車系統解耦合為輪型倒單擺後的整體系統動態方程式如下：

輪型倒單擺：

$$\begin{aligned} & (m_d l^2 + \frac{1}{4} m_b l^2 + I_{dy} + I_{by}) \ddot{\alpha} + (m_d l l_{rad} \cos \alpha + \frac{1}{2} m_b l l_{rad} \cos \alpha) \ddot{\theta} \\ & - (m_d g l \sin \alpha + \frac{1}{2} m_b g l \sin \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (2-135)$$

$$\begin{aligned}
& (m_d ll_r \cos \alpha + \frac{1}{2} m_b ll_r \cos \alpha) \ddot{\alpha} + (m_w l_r^2 + m_d l_r^2 + m_b l_r^2 + I_{wy}) \ddot{\theta} \\
& - (m_d ll_r \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + m_b \frac{1}{2} ll_r \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) + \frac{K_t^2}{R_a} \dot{\theta} = \frac{K_t}{R_a} e_w
\end{aligned} \tag{2-136}$$

並定義狀態空間

$$\chi = [\chi_1 \quad \chi_2 \quad \chi_3 \quad \chi_4]^T = [\alpha \quad \dot{\alpha} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T \tag{2-137}$$

整理可得

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2 \tag{2-138}$$

$$\dot{\chi}_2 = \frac{HG_w \sin(\chi_1) - N^2 \chi_2^2 \cos(\chi_1) \sin(\chi_1) + R_m N \cos(\chi_1) (\chi_4 K_t - e_w)}{MH - N^2 \cos^2(\chi_1)} \tag{2-139}$$

$$\dot{\chi}_3 = \chi_4 \tag{2-140}$$

$$\dot{\chi}_4 = \frac{-NG_w \cos(\chi_1) \sin(\chi_1) + MN \chi_2^2 \sin(\chi_1) - MR_m K_t \chi_4 + MR_m e_w}{MH - N^2 \cos^2(\chi_1)} \tag{2-141}$$

其中

$$M = m_d l^2 + \frac{1}{4} m_b l^2 + I_{dy} + I_{by} \tag{2-142}$$

$$N = m_d ll_r + \frac{1}{2} m_b ll_r \tag{2-143}$$

$$H = m_w l_r^2 + m_b l_r^2 + m_d l_r^2 + I_{wy} \tag{2-144}$$

$$G_w = m_d gl + \frac{1}{2} m_b gl \tag{2-145}$$

## 第三章 回授線性化理論探討

### 3-1 前言

在考慮整體非線性系統模型下的控制器設計往往複雜且不易，但卻有較佳的控制效果，而針對將非線性系統模型在平衡點線性化後所得線性系統的控制器設計雖然簡易，但因忽略許多非線性項，導致系統控制效能略顯不彰。回授線性化(feedback linearization) [25]是利用變數變換及狀態回授將非線性系統中之非線性項消除，並轉換成線性系統，如此一來不僅能利用早已發展成熟的線性控制理論來設計控制系統以達到預期的系統動態，而控制力也能將非線性項列入考慮。回授線性化大致上可分為兩種型式，第一種稱為輸入-輸出線性化(input-output linearization)，僅做到輸入與輸出之間是線性化，但狀態方程不一定能做到全部線性化，第二種稱為全狀態線性化(full-state linearization)，可把整體非線性狀態方程完全線性化，但必須符合全狀態回授線性化的條件。本章中將簡單地探討回授線性化的相關理論，本章節有：3-2 節介紹輸出-輸入線性化；3-3 節介紹全狀態線性化。

### 3-2 輸入-輸出線性化

考慮一個非線性單輸入單輸出(single-input-single-output)系統，其狀態空間方程式(state space equation)如下：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3-1)$$

$$y = h(x) \quad (3-2)$$

其中， $x \in R^n$ ， $f(x)$ 和 $g(x)$ 是充分平滑的向量場(vector field)， $u \in R$ 是一個控制輸入信號，假設 $h(x)$ 為充分平滑函數(sufficiently smooth function)。

**定義 1:** (Diffeomorphism 之定義 [26, 27, 28])

給定一函數  $T : D \subset R^n \rightarrow R^n$  稱為在定義域 (domain)  $D$  中為 diffeomorphism，若  $T$  滿足

- (1)  $T$  在  $D$  為連續可微 (continuously differentiable)。
- (2)  $T^{-1}$  存在且連續可微。

定義李氏微分 (Lie Derivative)：

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \triangleq L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (3-3)$$

其中

$$L_f h(x) \triangleq \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (3-4)$$

則  $L_f h(x)$  稱為李氏微分。接下來吾人將利用李氏微分來說明系統相對階

數 (relative degree) 的定義：

首先，對  $y = h(x)$  微分

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \triangleq L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (3-5)$$

假設  $L_g h(x) = 0$  代入 (3-5) 式，則

$$\dot{y} = L_f h(x) \quad (3-6)$$

得知輸入  $u$  與(3-6)式無關，繼續對  $y$  做第二次微分

$$y^{(2)} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u \quad (3-7)$$

再假設  $L_g L_f h(x) = 0$  代入(3-7)式，則

$$y^{(2)} = L_f^2 h(x) \quad (3-8)$$

得知輸入  $u$  與(3-8)式無關。如此反覆計算，假如  $h(x)$  滿足下列條件

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \text{ 當 } i=1, 2, \dots, \rho-1 \text{ 且 } L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0, \forall x \in D \quad (3-9)$$

可使輸入  $u$  不會出現在  $y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}$  的方程式中，直到第  $\rho$  次微分

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u \quad (3-10)$$

輸入  $u$  因  $L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$  才出現於上式中，由上面的方程式清楚顯示，利用

狀態回授控制

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1}} [-L_f^\rho h(x) + v] \quad (3-11)$$

系統的輸出-輸入相對關係為

$$y^{(\rho)} = v \quad (3-12)$$

若系統滿足(3-9)式則稱  $\rho$  為系統之相對階數(relative degree)。而(3-9)式

中  $L_g L_f^{\rho-1} h(x)$  表示如下：

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) = \frac{\partial(L_f^{\rho-1} h(x))}{\partial x} g(x) \quad (3-13)$$

其中  $L_f^{\rho-1} h(x)$  為

$$\begin{aligned} L_f^{\rho-1} h(x) &= L_f L_f^{\rho-2} h(x) = \frac{\partial(L_f^{\rho-2} h(x))}{\partial x} f(x) \\ L_f^{\rho-2} h(x) &= L_f L_f^{\rho-3} h(x) = \frac{\partial(L_f^{\rho-3} h(x))}{\partial x} f(x) \\ &\vdots \\ L_f^2 h(x) &= L_f L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h(x))}{\partial x} f(x) \\ L_f h(x) &= \frac{\partial(h(x))}{\partial x} f(x) \end{aligned} \quad (3-14)$$

**定理 1：**(輸入-輸出線性化的條件[26, 27, 28])

考慮一個  $n$  階的系統如(3-1)及(3-2)式所定義，假設此系統的相對階數為  $\rho < n$ ，且存在平滑函數  $\phi_1, \dots, \phi_{n-\rho}$  滿足

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad \text{當 } 1 \leq i \leq n - \rho, \quad \forall x \in D_0 \subset D。$$

令

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

則  $T$  在定義域  $D_0$  為 diffeomorphism，且系統(3-1)及(3-2)式可利用  $T$  變數變換成下式

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c \gamma(x) [u - \alpha(x)] \\ y &= C_c \xi\end{aligned}\tag{3-16}$$

選取適當的  $u$  可使(3-16)式成為輸入-輸出線性化。

如果當系統的相對階數為  $\rho = n$ ，則  $T(x)$  轉換式可寫成

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_f h(x) \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}\tag{3-17}$$

透過(3-17)式的轉換則可使系統達到全狀態線性化。

### 3-3 全狀態線性化

考慮一個非線性單輸入單輸出系統，其狀態空間方程式如下：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u\tag{3-18}$$

$$y = h(x)\tag{3-19}$$

其中， $x \in R^n$ ， $f(x)$  和  $g(x)$  是充分平滑的向量場， $u \in R$  是一個控制輸入信號。由前一節可知，若充分平滑函數  $h$  存在，且此系統的相對階數為  $n$  階時，則此系統為可全狀態回授線性化(feedback linearizable)。

本節中將討論，構成此可全狀態回授線性化之條件。

首先定義 Lie bracket  $[f, g]$  :

$$[f, g](x) \triangleq \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (3-20)$$

其中  $\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]$  和  $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$  為是 Jacobian 矩陣，且定義  $ad_f^k g(x) \triangleq [f, ad_f^{k-1} g](x)$ ，

$k \geq 1$ ，其中

$$ad_f^1 g(x) = ad_f g(x) = [f, g](x) \quad (3-21)$$

$$ad_f^0 g(x) = g(x) \quad (3-22)$$

**定義 2 :** (Involutive 之定義 [26, 27, 28])

在定義域  $D \subset R^n$  的任意兩個向量場  $g_1(x)$  及  $g_2(x)$ ，令  $\Delta(x)$  是由  $g_1(x)$  及  $g_2(x)$  對所有  $x \in D$  所展開 (span) 之空間且寫成  $\Delta(x) \triangleq \text{span}\{g_1(x), g_2(x)\}$ ，如果  $g_1$  及  $g_2$  的 Lie bracket 都在  $\Delta$  中，如下：

$$g_1 \in \Delta, g_2 \in \Delta \text{ 且 } [g_1, g_2] \in \Delta \quad (3-23)$$

則  $\Delta$  稱為 involutive。上述為一般化的定義，若是存在  $k$  個向量場，就可表示如下：

在定義域  $D \subset R^n$  的向量場  $f_1, f_2, \dots, f_k$

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\} \quad (3-24)$$

若對所有  $x \in D$ ， $\Delta$  為非奇異 (nonsingular) 則  $\Delta$  為 involutive 若且唯若

$$[f_i, f_j] \in \Delta, \forall 1 \leq i, j \leq k \quad (3-25)$$

經由上述定義的介紹，可全狀態回授線性化的系統必須滿足下列的定理

**定理 2：**(全狀態回授線性化之條件[26, 27, 28])

非線性系統(3-18)式為可全狀態回授線性化，若且唯若存在一個定義域  $\Omega \subset R^n$ ，使得下列條件被滿足：

(1) 對所有  $x \in \Omega$ ， $G(x) = [g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-1} g(x)]$ ，且秩(rank)為  $n$ 。

(2) 在  $\Omega$  中， $\phi = \text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$  是 involutive。

若一系統滿足上述的條件式，則必存在一個輸出函數  $h(x)$ ，使系統的相對階數為  $n$ ，並使得

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= 0 \\ L_g L_f h(x) &= 0 \\ &\vdots \\ L_g L_f^{n-2} h(x) &= 0 \\ L_g L_f^{n-1} h(x) &\neq 0 \end{aligned} \quad (3-26)$$

可獲得  $T(x)$

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

可將系統(3-18)轉換成如下的形式

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{n-1} &= \xi_n \\
\dot{\xi}_n &= L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x) \cdot u
\end{aligned} \tag{3-28}$$

$[\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n]^T$  是一個新的狀態空間，同時可選擇適合的狀態回授控制如下

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} [-L_f^n h(x) + v] \tag{3-29}$$

最後，將系統轉換成

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \tag{3-30}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3-31}$$

由(3-30)式及(3-31)式可知此系統為線性可控的系統，因此可利用回授控制  $v = -K\xi$ ，及現存之線性理論控制器找到一個向量  $K$  增益使得閉迴路系統穩定。

## 第四章 順滑模態控制理論探討

### 4-1 前言

在控制系統設計中，常需要建立系統之數學模型來設計控制器，但在推導數學模型的過程中，並無法完整地考慮到實際系統中所有影響因素，故系統之模型與實際系統就存在有不確定項，再加上機電系統多屬非線性系統，就如同本論文第二章所推導之單輪車系統數學模型，就可看出系統具有複雜的非線性項存在，而在面對這些不確定項以及非線性項，利用古典控制(classical control)理論所設計之控制器，有可能導致系統控制效能不彰或甚至不穩定的情形發生。順滑模態控制主要概念乃是利用滑動面(sliding surface)的設計理念來抑制這些不確定項以及非線性項對於系統的影響，進而提升系統的強健性，並可達到良好的暫態性能、快速的時間響應，以及對系統參數的變動和外部干擾的低靈敏度之優點。本章其它內容有：4-2 節順滑模態的介紹；4-3 節針對迫近與順滑條件做探討；4-4 節順滑模態控制器的設計方法；4-5 節滑動層的考量；4-6 節非線性機電系統的順滑模態控制設計方法。

### 4-2 順滑模態的介紹

順滑模態首先必須定義一個順滑函數(sliding function) $S$ ，這個順滑函數將狀態空間分成 $S > 0$ 、 $S < 0$ 及 $S = 0$ 三個部份，其狀態空間示意圖如圖 4-1 所示。

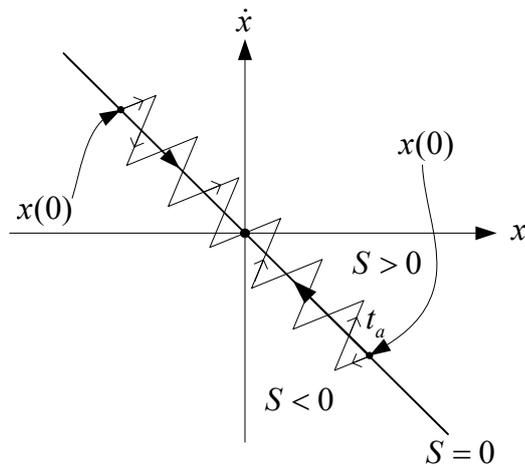


圖 4-1 順滑模態

在圖 4-1 中  $S=0$  平面稱為順滑面(sliding surface)，此平面必須是連續且包含平衡點並由系統的狀態所構成。設計順滑模態控制器主要精義在於使系統的初始狀態  $x(0)$  在有效時間  $t_a$  內接觸到順滑面，這個接觸的過程稱為迫近模態(approaching mode)，而當  $t > t_a$  時系統動態將不再脫離順滑面，且將保持在順滑面上，在這個順滑面的系統行為稱為順滑模態(sliding mode)。

### 4-3 迫近與順滑條件探討

順滑面在系統狀態的空間可分成  $S > 0$ 、 $S < 0$  兩個集合，如圖 4-2 所示

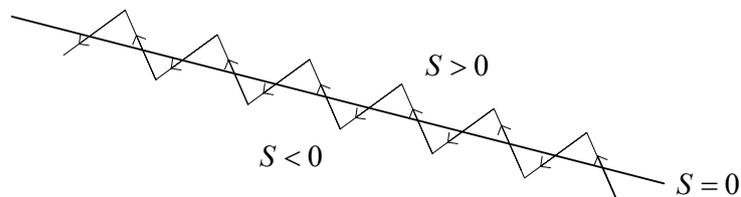


圖 4-2 順滑條件示意圖

由圖 4-2 可看出當  $S > 0$  時， $S$  必須隨時間遞減才不會脫離順滑面，反之，當  $S < 0$  時， $S$  則必須隨時間遞增，故順滑條件可表示為

$$\lim_{S \rightarrow 0} S\dot{S} < 0 \quad (4-1)$$

而迫近條件主要觀念是指系統狀態行徑的路線在有限的時間內接觸到順滑面，最常利用的迫近條件[29]如下式

$$S\dot{S} \leq -\sigma|S| \quad (4-2)$$

其中  $\sigma > 0$ 。為了證明迫近條件成立，在此利用 Lyapunov's 定理[30]來說明，首先選取 Lyapunov 候選函數(Lyapunov function candidate)

$$V = \frac{1}{2}S^2 \quad (4-3)$$

而 Lyapunov 候選函數對時間  $t$  是可微的，因此

$$\dot{V} = S\dot{S} \quad (4-4)$$

當迫近條件(4-2)式成立時，將使得

$$\dot{V} \leq -\sigma|S| \quad (4-5)$$

即

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2}S^2 \leq -\sigma|S| \quad (4-6)$$

由(4-6)式可知

$$\begin{aligned}
|S| \frac{d}{dt} |S| &\leq -\sigma |S| \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} |S| &\leq -\sigma
\end{aligned}
\tag{4-7}$$

將(4-7)式兩邊作時間 0 到  $t_h$  的積分，可求得

$$|S(t_h)| - |S(0)| \leq -\sigma t_h \tag{4-8}$$

由(4-8)式可知

$$t_h \leq \frac{|S(0)|}{\sigma} \tag{4-9}$$

也就是系統軌跡可以在有限時間內接觸到順滑面  $S=0$ 。由上述分析可知，(4-2)式的迫近條件，亦可確保順滑條件(4-1)式的成立，這在設計順滑模態控制器時是最常使用的方法之一。

#### 4-4 傳統順滑模態控制器設計方法

順滑模態控制器的設計步驟有二。步驟一：設計順滑面使得系統在順滑面上的動態滿足所需的控制目的；步驟二：設計可變結構控制法則 (variable structure control law)，使得(4-2)式成立，使系統之動態迫近順滑面且停留在順滑面上，如此可使系統不受參數變動及外界干擾所影響。順滑模態控制是狀態變數回授的一種控制方法，因此所設計的方法通常都以狀態變數來表示。在此採用一個四階系統的穩定化設計為範例，考慮一個四階系統：

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + u + \tilde{d}
\end{aligned} \tag{4-10}$$

其中  $x_i, i=1, 2, 3, 4$  為系統狀態， $u$  為控制輸入， $\tilde{d}$  表示系統不確定性或外界干擾，其大小  $|\tilde{d}|$  是有界的，控制的目的是把系統軌跡準確地控制到平衡點  $x=0$ ，以下將利用順滑模態控制來達成目標。由系統的數學模型選定順滑函數  $S$  為

$$S = cx = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \tag{4-11}$$

假設  $c_4=1$ ，此時順滑函數可表示為

$$S = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + x_4 \tag{4-12}$$

對(4-12)式中的順滑函數微分可得

$$\dot{S} = c\dot{x} = c_1\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 + c_3\dot{x}_3 + \dot{x}_4 \tag{4-13}$$

將(4-10)式代入(4-13)式整理後可得

$$\dot{S} = a_1x_1 + (c_1 + a_2)x_2 + (c_2 + a_3)x_3 + (c_3 + a_4)x_4 + u + \tilde{d} \tag{4-14}$$

為了符合迫近條件(4-1)式與順滑條件(4-2)式，令控制法則如下：

$$u = -a_1x_1 - (c_1 + a_2)x_2 - (c_2 + a_3)x_3 - (c_3 + a_4)x_4 - \sigma \text{sgn}(S) \tag{4-15}$$

其中切換函數  $\text{sgn}(S)$  定義如下[29]

$$\text{sgn}(S) = \begin{cases} 1 & S > 0 \\ 0 & S = 0 \\ -1 & S < 0 \end{cases} \quad (4-16)$$

因  $|\tilde{d}|$  為有界，則選擇

$$\sigma \gg |\tilde{d}| \quad (4-17)$$

將(4-15)代入(4-14)式可得

$$\dot{S} = -\sigma \text{sgn}(S) + \tilde{d} \quad (4-18)$$

將(4-18)式兩邊同乘  $S$ ，整理可得

$$\begin{aligned} S\dot{S} &= -\sigma|S| + S\tilde{d} \leq -\sigma|S| + |S||\tilde{d}| \\ &= -\sigma|S|(1 - \frac{|\tilde{d}|}{\sigma}) \end{aligned} \quad (4-19)$$

而由(4-17)式，可將(4-19)式表示為

$$S\dot{S} < -\sigma|S| \quad (4-20)$$

根據(4-19)式及(4-20)式，可看出(4-15)式所設計的控制法則已符合順滑條件(4-1)式及迫近條件(4-2)式，因此系統之動態將收斂且停留在順滑面，故

$$S = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + x_4 = 0 \quad (4-21)$$

$$\dot{S} = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 + c_3 \dot{x}_3 + \dot{x}_4 = 0 \quad (4-22)$$

由(4-15)式、(4-18)式以及(4-21)式、(4-22)式，代入(4-10)式，整理可得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3\end{aligned}\tag{4-23}$$

而(4-23)式特徵方程式為

$$\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_2\lambda + c_1 = 0\tag{4-24}$$

若選定  $c_i, i=1,2,3$  使特徵方程式 3 個根都位於負半平面，則系統將收斂至平衡點並穩定。故控制力(4-15)式在選擇適當的  $\sigma$  及特定  $c_i, i=1,2,3$  下，系統動態將收斂且停留在順滑面並朝向平衡點移動，且能有效抑制不確定項，進而增加系統強健性。

#### 4-5 滑動層的考量

在順滑模態控制器中運用了一個理想的切換函數  $\text{sgn}(S)$  如圖 4-3，這個切換函數必須利用無窮大的切換頻率才能實現，在實際系統中是無法實現的，一般都是使用快速的切換元件來取代，但卻會造成系統狀態在順滑面  $S=0$  兩側不斷切跳，這種切跳現象(chattering)因其頻率高易激發(excite)未建模動態(unmodeled dynamics)而引發系統不穩定且易造成機電系統之磨耗，為抑制此不良因素影響可使用滑動層(boundary layer) [29] 來改善這個缺點，使用的方法是將  $\text{sgn}(S)$  函數修正為

$$\text{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right) = \begin{cases} 1 & S > \phi \\ S/\phi & |S| \leq \phi \\ -1 & S < -\phi \end{cases} \quad (4-25)$$

$$= \begin{cases} \text{sgn}(S) & |S| > \phi \\ S/\phi & |S| \leq \phi \end{cases}$$

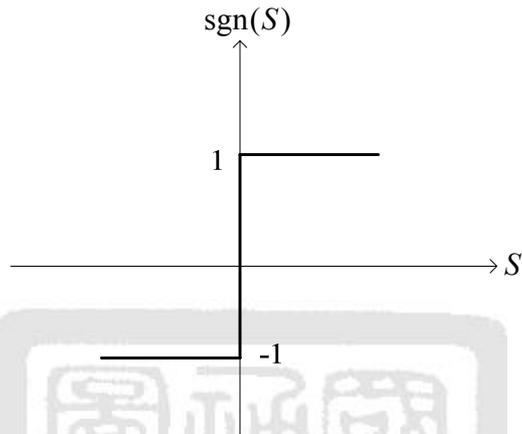


圖 4-3  $\text{sgn}(S)$  函數

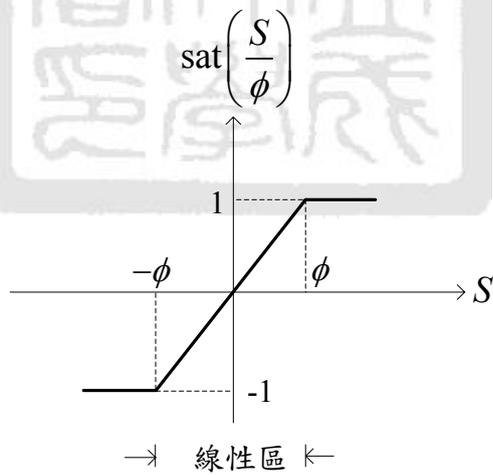


圖 4-4  $\text{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right)$  函數

從(4-25)式與圖 4-4 可看出順滑模態被分成三個部份： $S > \phi$ 、 $|S| \leq \phi$ 、 $S < -\phi$ ，其中 $|S| \leq \phi$ 為線性區，當系統的狀態進入到此區域後，行徑軌跡

將會變得比較緩和，因此可以減少切跳現象，但是系統狀態卻會產生誤差。利用以上的觀念，吾人以  $\text{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right)$  取代  $\text{sgn}(S)$ 。

## 4-6 非線性機電系統順滑模態控制器設計方法[31]

4-4 節的順滑模態控制器設計過程主要針對線性化的系統，但現今的機電系統通常有很多非線性項，這些非線性包含了雜訊、摩擦力等等，若忽略這些非線性項，採用線性化之系統設計控制器，將會降低控制器之效能。故在本章節中將說明針對非線性機電系統如何設計順滑模態控制器。一般非線性的機電系統的數學動態方程式可表示為(4-26)式

$$J(q)\ddot{q} = f(q, \dot{q}) + Bu \quad (4-26)$$

$q$  為系統狀態， $u$  為控制力，(4-26)式可寫成

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \tilde{f}_1(q, \dot{q}) + \tilde{B}_1(q)u \\ \ddot{q}_2 &= \tilde{f}_2(q, \dot{q}) + \tilde{B}_2(q)u \end{aligned} \quad (4-27)$$

其中  $\begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix} = J^{-1}f$ ， $\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} = J^{-1}B$ 。假設  $\det(\tilde{B}_2) \neq 0$ ，利用座標轉換關係[31]將原

來狀態轉換成

$$z = \phi_n(q) \in R^{n-m}, y = q_2 \quad (4-28)$$

其中  $\phi_n(q)$  必須滿足以下條件式

$$\frac{\partial \phi_n(q)}{\partial q} J^{-1}B = 0 \quad (4-29)$$

則經過座標轉換後系統動態方程式可表示為

$$\dot{z} = \frac{\partial \phi_n(q)}{\partial q} \dot{q} \quad \ddot{z} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial \phi_n(q)}{\partial q} \dot{q} \right) \dot{q} + \frac{\partial \phi_n(q)}{\partial q} J^{-1} (f + Bu) \quad (4-30)$$

整理後

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= f_1(z, y, \dot{z}, \dot{y}) \\ \ddot{y} &= f_2(z, y, \dot{z}, \dot{y}) + B_2(z, y)u, \quad \det(B_2) \neq 0 \end{aligned} \quad (4-31)$$

式(4-31)又稱為正規化形式(regular form)[31]。假設平衡點為

$$\begin{aligned} f_1(0, 0, 0, 0) &= 0 \\ f_2(0, 0, 0, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (4-32)$$

本節順滑模態設計方式有三種，以下分別介紹。

**設計方法一：**

假設此動態系統輸出  $y=0, \dot{y}=0$  時，其系統之零動態(zero dynamics) [32]為

$$\ddot{z} = f_1(z, 0, \dot{z}, 0) \quad (4-33)$$

並假設此零動態為穩定系統。則可設計順滑面為

$$S = \dot{y} + cy = 0 \quad (4-34)$$

$c$  的選取必須為正，將順滑函數微分

$$\dot{S} = \ddot{y} + c\dot{y} = 0 \quad (4-35)$$

利用(4-31)式及(4-35)式可得控制力  $u$ 。當  $s=0$  時，狀態  $y$  將隨著時間收斂至零，此時  $z$  也隨著  $y$  的收斂而衰減為零。

設計方法二：

假設此動態系統輸出  $z=0, \dot{z}=0$ ，則零動態如下

$$\ddot{z} = f_1(0, y, 0, \dot{y}) \quad (4-36)$$

又假設此零動態系統為穩定，則可設計順滑面為

$$s = f_1 + c_1 z + c_2 \dot{z} = 0 \quad (4-37)$$

其中

$$f_1 = -c_1 z - c_2 \dot{z} \quad (4-38)$$

將(4-38)式代入(4-31)式可得

$$\ddot{z} = -c_1 z - c_2 \dot{z} \quad (4-39)$$

其中  $c_1, c_2$  為正，將順滑函數  $s$  微分可得

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial f_1}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{z}} \ddot{z} + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}} \ddot{y} + c_1 \dot{z} + c_2 \ddot{z} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial \dot{z}} \right) f_1(0, y, 0, \dot{y}) + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}} (f_2(z, y, \dot{z}, \dot{y}) + B_2(z, y)u) \\ &\quad + c_1 \dot{z} + c_2 (f_1(0, y, 0, \dot{y})) \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} + c_1 \right) \dot{z} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} + f_1(0, y, 0, \dot{y}) \left( \frac{\partial f_1}{\partial \dot{z}} + c_2 \right) + f_2(z, y, \dot{z}, \dot{y}) \left( \frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}} \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}} \right) B_2(z, y)u \\ &= F(z, y, \dot{z}, \dot{y}) + \left( \frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}} \right) B_2(z, y)u \end{aligned} \quad (4-40)$$

其中  $F(z, y, \dot{z}, \dot{y})$  是與控制力獨立的一個函數，再利用順滑條件(4-1)與迫近條件(4-2)設計控制力  $u$  即可使系統穩定且  $z \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 。

### 設計方法三：

在系統(4-31)式中，假設  $f_1$  與  $\dot{y}$  無關， $f_1(z, y, \dot{z}, \dot{y}) = f_1(z, y, \dot{z})$ ，若設計方法二中(4-38)式成立， $z$  和  $\dot{z}$  會收斂至原點，則  $f_1$  可表示為

$$f_1(0, y, 0) = 0 \quad (4-41)$$

但在(4-41)式中， $y$  不能確保收斂至平衡點，故設計新的順滑函數使得  $y$  能在有限時間內收斂至平衡點，此新的順滑面為

$$s = \dot{s}_1 + \alpha \dot{s}_1 = 0 \quad (\alpha > 0) \quad (4-42)$$

其中假設  $s_1 = f_1 + c_1 z + c_2 \dot{z}$ ，將  $s_1$  微分

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{z}} \ddot{z} + c_1 \dot{z} + c_2 \ddot{z} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} + \left( c_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \dot{z} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial \dot{z}} + c_2 \right) f_1(z, y, \dot{z}) \end{aligned} \quad (4-43)$$

因為  $f_1(z, y, \dot{z}, \dot{y}) = f_1(z, y, \dot{z})$ ，(4-43)式可表示為

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} + \left( c_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \dot{z} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial \dot{z}} + c_2 \right) f_1(z, y, \dot{z}) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} + F_1(z, y, \dot{z}) \end{aligned} \quad (4-44)$$

再將新的順滑函數  $s$  微分可得

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= \ddot{s}_1 + \alpha \dot{s}_1 \\
&= \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \dot{y} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{z}} \ddot{z} + \alpha \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} + F_1(z, y, \dot{z}) \right) \\
&= \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \alpha \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \dot{y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{z}} \ddot{z} + \alpha F_1(z, y, \dot{z}) \\
&= \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial f_1}{\partial y} + \alpha \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \dot{y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{z}} f_1(z, y, \dot{z}) + \alpha F_1(z, y, \dot{z}) \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial y} (f_2(z, y, \dot{z}, \dot{y}) + B_2(z, y)u) \\
&= F(z, y, \dot{z}, \dot{y}) + \frac{\partial f_1}{\partial y} B_2(z, y)u
\end{aligned} \tag{4-45}$$

由  $\dot{s}$  可求得  $u$ ，使得  $s \rightarrow 0$ ， $s_1 \rightarrow 0$ ， $y \rightarrow 0$ 。

在非線性機電系統設計中，因為包含了許多的非線性項，以及每個系統往往有許多差異性，所以在設計控制器的過程會因為系統動態方程式的不同，使得順滑函數必須依照系統狀態的變化來選取，所以在順滑函數選擇上，遠比線性系統來的複雜且困難，故在設計控制器時，必須靠經驗的累積才能選取適當的順滑函數。

## 第五章 平衡控制器設計與模擬結果

### 5-1 前言

一機電系統之效能是否優良，控制器絕對是相當重要的因素，控制器的強健性以及其控制性能都將影響系統之響應。本章將介紹單輪車系統所使用之平衡控制器的設計過程以及模擬結果，並比較各控制器之性能。首先，將單輪車系統作平衡點線性化後再使用 LQR (Linear Quadratic Regulator) 控制器實現平衡控制，此控制法則利用狀態空間回授控制 (state space feedback control) 的穩定化求出最佳回授增益  $K$  值使得系統達到區域穩定。接下來將利用第二章單輪車系統數學模型推導中，吾人最後得到單輪車系統在平衡點附近可解耦合成慣性輪倒單擺系統以及輪型倒單擺系統之結果，分別對單輪車解耦之兩子系統做控制器之設計。慣性輪倒單擺系統部分將使用全狀態回授線性化 (feedback linearization) 控制器來完成其平衡控制器，輪型倒單擺系統的控制器設計使用順滑模態 (sliding mode) 控制器。本章內容有：5-2 節介紹 LQR 控制器理論與平衡控制器之設計與模擬；5-3 節介紹全狀態回授線性化控制器之設計與模擬；5-4 節介紹順滑模態控制器之設計與模擬；5-5 節介紹各控制器模擬響應比較。

### 5-2 LQR 控制器理論與平衡控制器之設計與模擬

針對線性系統利用狀態空間回授控制 (state space feedback control) 的穩定化方法中，LQR 控制法是利用極小化性能指標 (performance index) 函數  $J$ ，以取得最佳回授增益  $K$ ，其中性能指標可描述該系統所具有之

能量特性。由於回授增益  $K$  取決於性能指標  $Q$  及  $R$  之權重矩陣 (weighting matrix) 之選擇，所以可推知 LQR 控制器的性能表現完全取決於  $Q$  及  $R$  之權重矩陣的選取。而本節中先將非線性單輪車系統於平衡點線性化之後，再利用 LQR 控制法則來完成平衡控制的設計。

假設一線性系之狀態方程式 (state equation) 如下

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5-1)$$

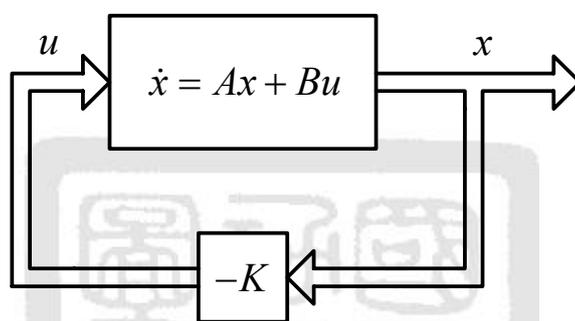


圖 5-1 狀態回授控制系統結構示意圖

吾人希望設計控制力  $u(t)$  當  $t \geq 0$ ，使得  $x(t) \rightarrow 0$  當  $t \rightarrow \infty$ 。這個問題稱為調節問題 (regulation problem)，吾人以最佳化的方法來解這個問題，首先定義性能指標  $J$  如下

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (5-2)$$

上式中的  $Q$ 、 $R$  分別為狀態  $x(t)$  與控制力  $u(t)$  的權重矩陣 (weighting matrix)，其中

$$Q = Q^T \geq 0, \text{ 半正定矩陣 (positive semi-definite matrix)}$$

$$R = R^T > 0, \text{ 正定矩陣 (positive definite matrix)}$$

(5-2) 式中的矩陣  $Q$  為反應加權矩陣 (response weighting matrix)，矩陣  $R$  為

控制力加權矩陣(control force weighting matrix)。

矩陣  $Q$  與  $R$  數值的相對大小代表要求控制效益與所需控制力之相對重要性。調整權重矩陣  $Q$  與  $R$ ，並考慮控制力  $u(t)$  的特性與限制，使得  $J$  為最小化，並達成穩定化控制的目的，這個過程稱之為 LQR 控制。此最佳化(optimization)的解為狀態回授控制如下所示

$$u = -Kx(t) \quad (5-3)$$

其中

$$K = R^{-1}B^T P \quad (5-4)$$

在此的  $P$  為 ARE (Algebraic Riccati Equation) 的解如下式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = -Q \quad (5-5)$$

選擇  $Q$  與  $R$  時，需注意所得的回授增益  $K$  要使控制力  $u(t)$  能在系統有效工作範圍之內。

因 LQR 設計方法僅適用於線性系統，故在此先將單輪車系統做平衡點線性化，已知單輪車系統平衡點線性化後為(2-113)式，由於偏向角  $\gamma$  不影響平衡的狀況，故吾人捨去偏向角狀態，又由(2-113)式知轉盤角度  $\phi$  不影響動態，故為了提高慣性輪倒單擺系統之平衡控制性能，吾人捨去轉盤轉動角度之狀態，最後可將單輪車系統狀態空間方程式整理為(5-6)式，而系統物理參數如表 5-1。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = A_L \begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + B_L \begin{bmatrix} e_w \\ e_d \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

表 5-1 單輪車系統物理參數

符號	數值	說明
$m_w$ (kg)	0.225	輪子質量
$m_d$ (kg)	1.586	轉盤質量
$m_b$ (kg)	6.014	車身質量
$l_r$ (m)	0.053	輪子半徑
$l_d$ (m)	0.07	轉盤半徑
$l$ (m)	0.56	車身長
$I_{wx}$ (kg-m <sup>2</sup> )	0.000158	體座標上輪子在 $\hat{x}''$ 軸上之轉動慣量
$I_{wy}$ (kg-m <sup>2</sup> )	0.000316	體座標上輪子在 $\hat{y}''$ 軸上之轉動慣量
$I_{wz}$ (kg-m <sup>2</sup> )	0.000158	體座標上輪子在 $\hat{z}''$ 軸上之轉動慣量
$I_{bx}$ (kg-m <sup>2</sup> )	0.1772	體座標上車身在 $\hat{x}''$ 軸上之轉動慣量
$I_{by}$ (kg-m <sup>2</sup> )	0.1677	體座標上車身在 $\hat{y}''$ 軸上之轉動慣量
$I_{bz}$ (kg-m <sup>2</sup> )	0.0306	體座標上車身在 $\hat{z}''$ 軸上之轉動慣量
$I_{dx}$ (kg-m <sup>2</sup> )	0.0039	體座標上轉盤在 $\hat{x}''$ 軸上之轉動慣量

$I_{dy}$ (kg-m <sup>2</sup> )	0.0019	體座標上轉盤在 $\hat{y}'''$ 軸上之轉動慣量
$I_{dz}$ (kg-m <sup>2</sup> )	0.0019	體座標上轉盤在 $\hat{z}'''$ 軸上之轉動慣量
$g$ (m/s <sup>2</sup> )	9.81	重力加速度

代入系統物理參數如表 5-1 後，可得

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3905 & 0 & 0 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ -2.3872 & 0 & 0 & -0.0018 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4307.9077 & 0 & 0.3302 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4307.9077 & 0 & -0.9081 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

$$B_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0073 & 0 \\ 0.061 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -11.6456 \\ 0 & 31.205 \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

此時系統特徵值  $E$  所在位置為

$$E = \{0, -0.6255, 0.6242, -0.0005, 65.4712, -65.8014, -0.5779\} \quad (5-9)$$

由系統之特徵值 65.4712 以及 0.6242 可知此時系統為不穩定。接下來先以(5-10)式來檢察系統之可控性

$$Q_C = [B_L \quad A_L B_L \quad A_L^2 B_L \quad A_L^3 B_L \quad A_L^4 B_L \quad A_L^5 B_L \quad A_L^6 B_L] \quad (5-10)$$

經計算後， $Q_C$  矩陣的秩數(rank)為

$$\text{rank}(Q_C) = 7 \quad (5-11)$$

故系統可控，接著再選取適當的  $Q$  與  $R$  值如下

$$Q = \begin{bmatrix} 570 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

再經由 MATLAB 進行 LQR 控制器設計而得到最佳回授增益  $K$  矩陣

$$K = \begin{bmatrix} -645 & -22.4 & -1866.3 & -175.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1636.4 & -366.3 & -0.3 \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

此時閉迴路  $(A_L - B_L K)$  特徵值  $E_1$  所在位置為

$$E_1 = \{-4143.8701, -1.1489 \pm j0.2883, -0.3155 \pm j0.0458, -1.7198 \pm j1.5514\} \quad (5-13)$$

經 LQR 控制器設計所得之閉迴路特徵值均位於左半平面，此時系統穩定。

接下來將利用 MATLAB/Simulink 進行數值模擬，以確定控制制控制性能以及系統的之可行性，而整體 LQR 控制器控制方塊圖如圖 5-2 所示。

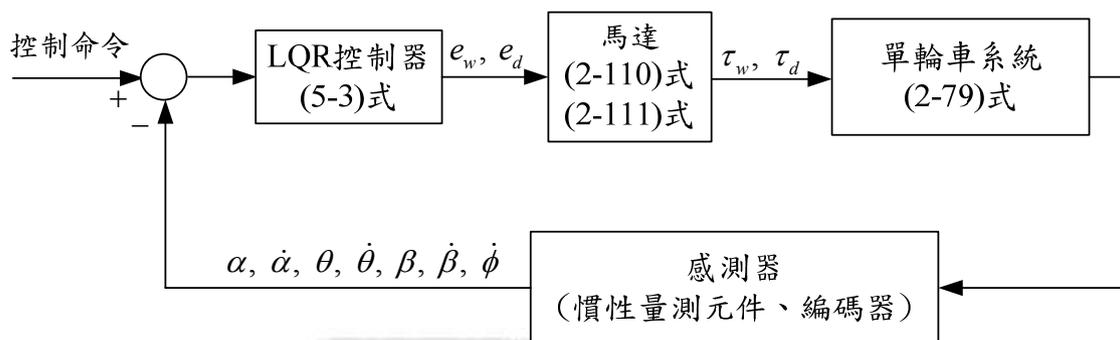


圖 5-2 LQR 控制器控制方塊圖

首先，吾人令初始狀態為(5-14)式。

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7]^T = [0.06 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (5-14)$$

其代表之意義為單輪車系統向前傾斜 0.06 徑度，經 LQR 控制器所得之單輪車系統之前後傾角模擬響應如圖 5-3，車輪角度模擬響應如圖 5-4，車輪控制電壓模擬響應如圖 5-5，單輪車系統之左右傾角模擬響應如圖 5-6，轉盤角速度模擬響應如圖 5-7，轉盤控制電壓模擬響應如圖 5-8。

另外，吾人令

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.04 \quad 0 \quad 0]^T \quad (5-15)$$

其代表之意義為單輪車系統向左傾斜 0.04 徑度，經 LQR 控制器控制後，單輪車系統之前後傾角模擬響應如圖 5-9，車輪角度模擬響應如圖 5-10，車輪控制電壓模擬響應如圖 5-11，單輪車系統之左右傾角模擬響應如圖

5-12, 轉盤角速度模擬響應如圖 5-13, 轉盤控制電壓模擬響應如圖 5-14。

當單輪車系統只有  $\beta$  設定初始值且其他初始狀態設為零時, 由系統動態方程式(2-79)式可知, 系統的前後動態以及偏向角度將恆為零, 也就是不需任何控制力, 前後動態即可維持平衡, 故模擬響應圖 5-6、圖 5-7、圖 5-8 恆為零, 反之, 當只有  $\alpha$  設定初始值且其他初始狀態設為零時, 左右動態以及偏向角度將恆為零, 也就是不需控制力, 左右動態即可維持平衡, 故模擬響應圖 5-9、圖 5-10、圖 5-11 恆為零。另外, 由模擬結果可看出, 車輪控制電壓幾乎無飽和現象, 而且系統可收斂。而轉盤控制電壓雖然一開始有短暫飽和於電壓 18 V 的現象, 但系統還是可以穩定平衡。

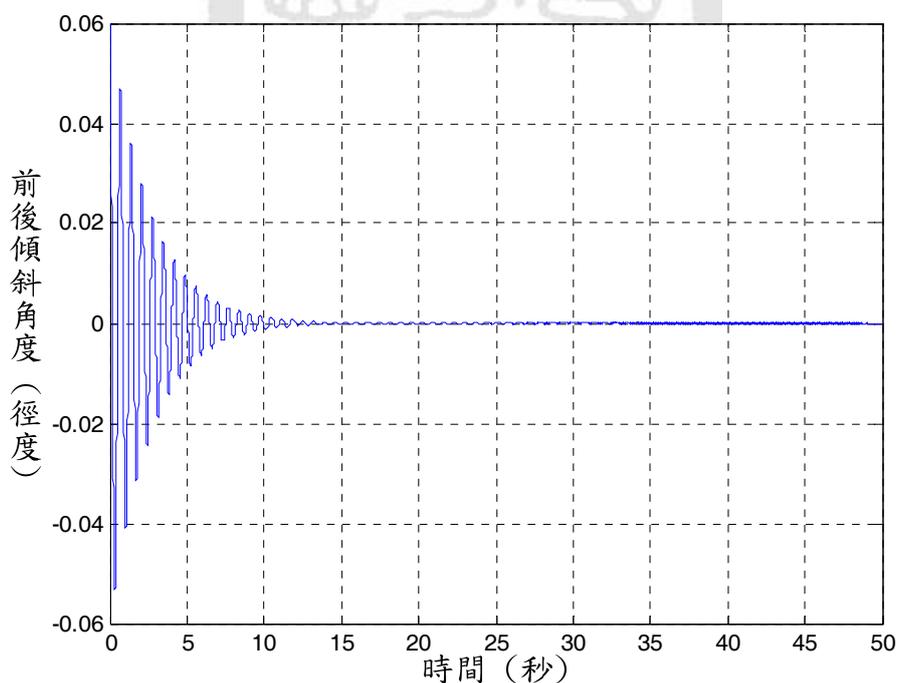


圖 5-3 LQR 控制器之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ )

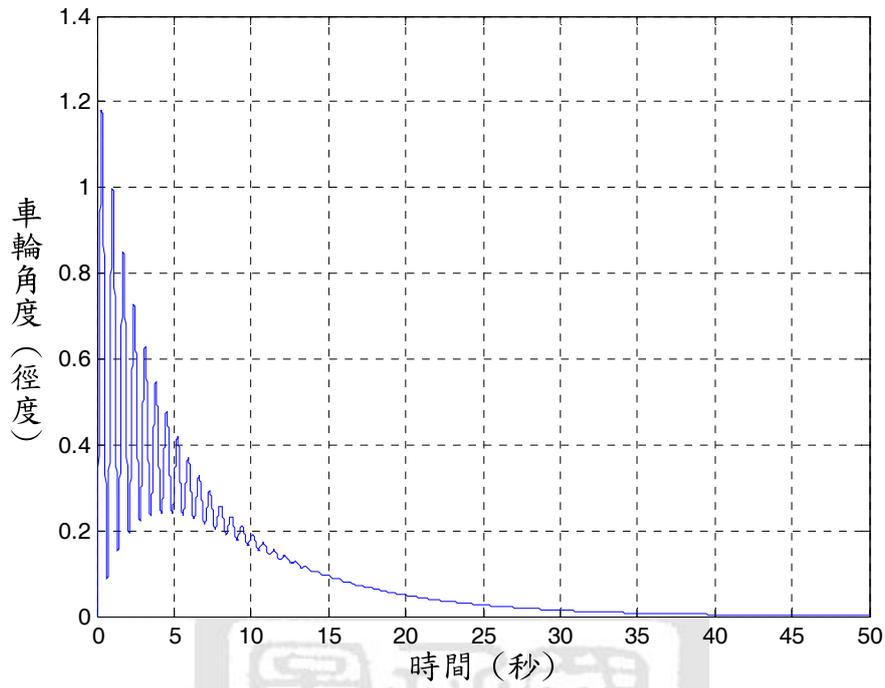


圖 5-4 LQR 控制器之車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ )

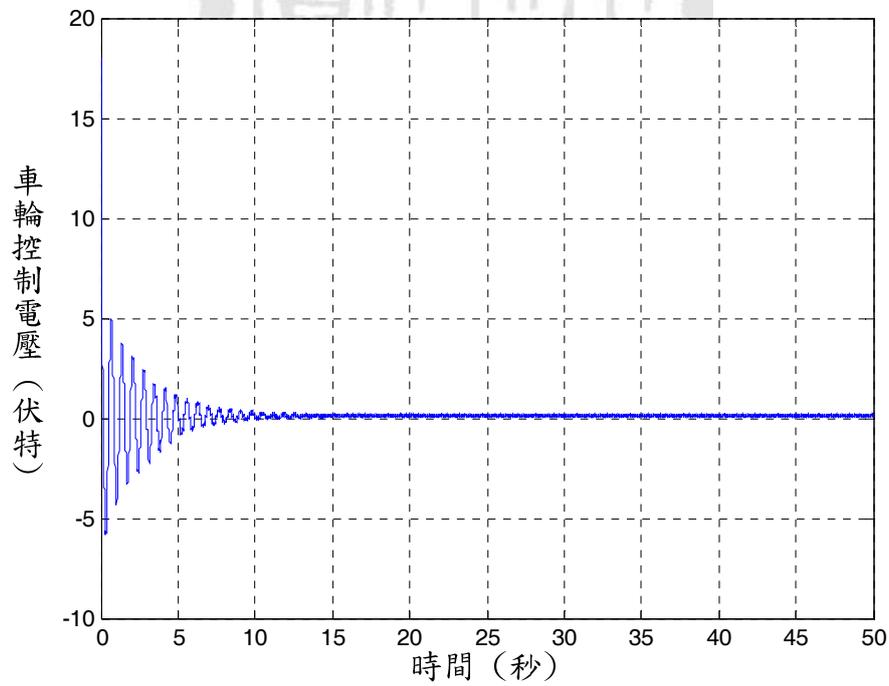


圖 5-5 LQR 控制器之車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ )

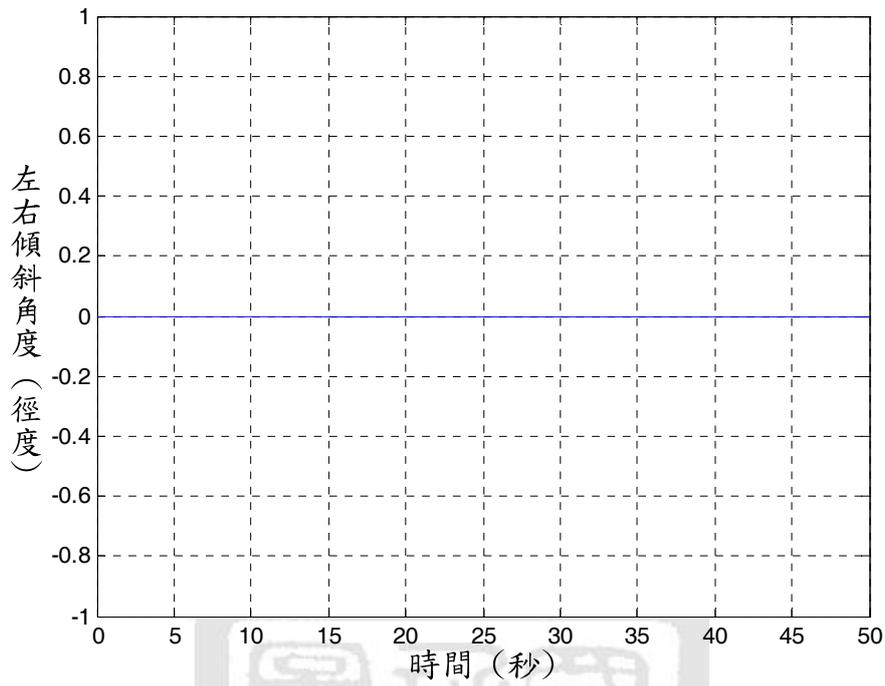


圖 5-6 LQR 控制器之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ )

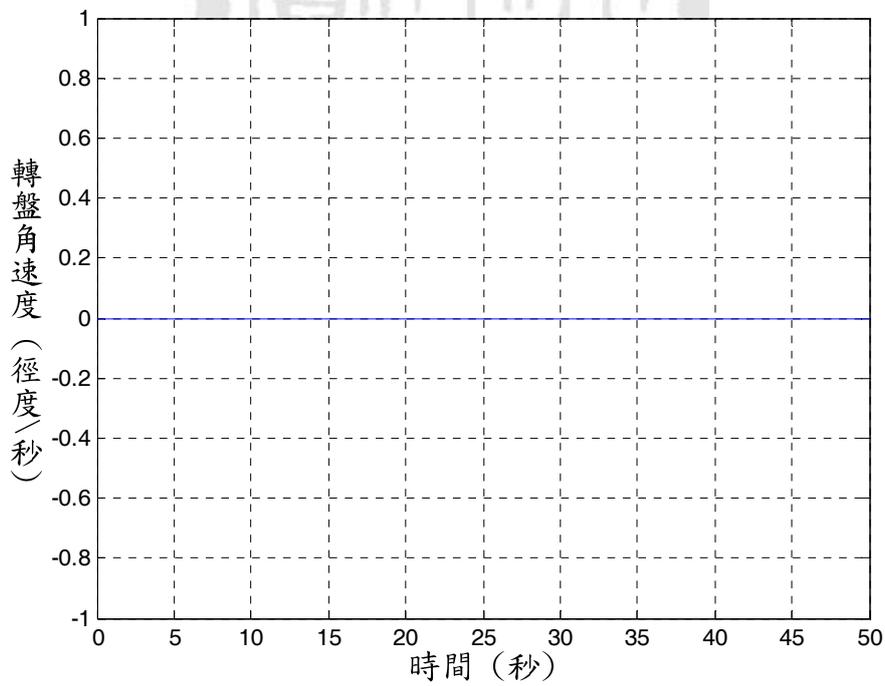


圖 5-7 LQR 控制器之轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ )

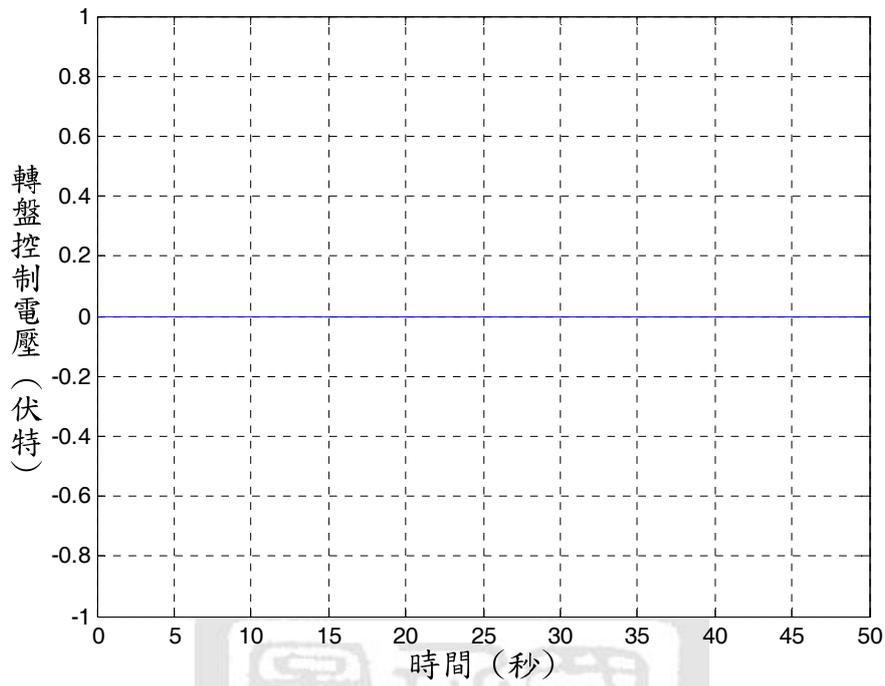


圖 5-8 LQR 控制器之轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ )

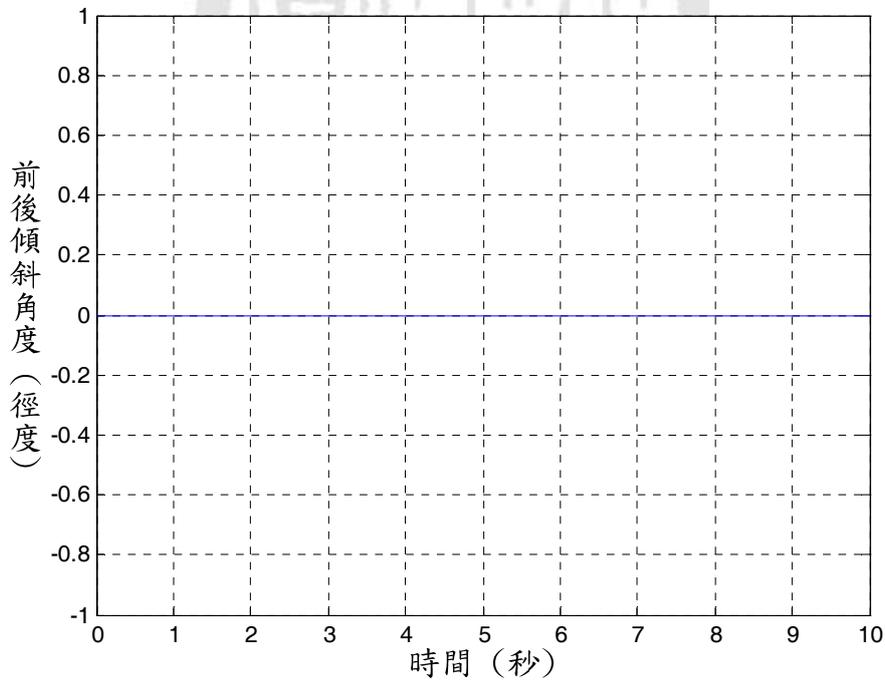


圖 5-9 LQR 控制器之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ )

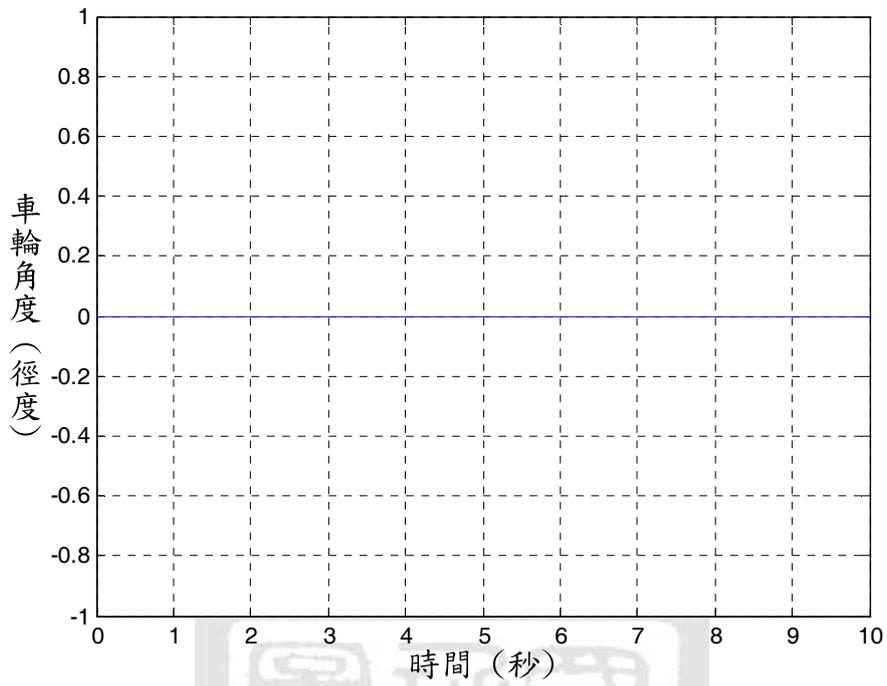


圖 5-10 LQR 控制器之車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ )

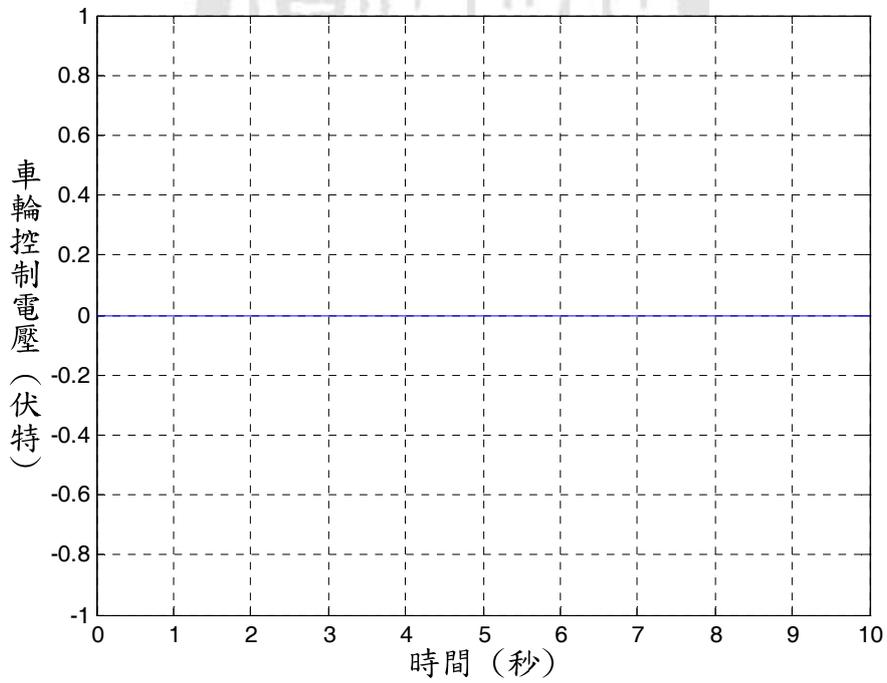


圖 5-11 LQR 控制器之車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ )

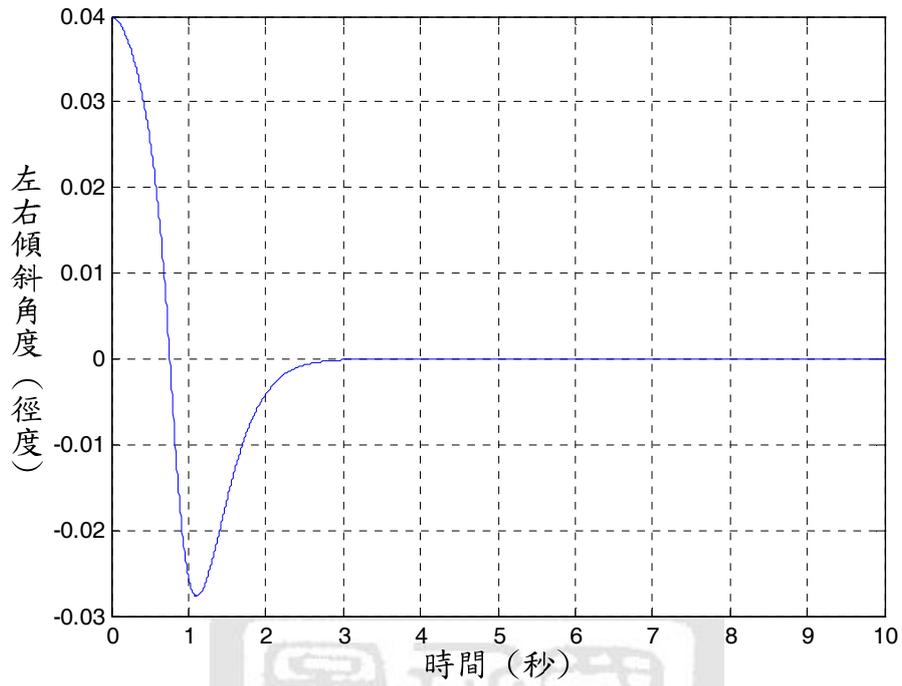


圖 5-12 LQR 控制器之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ )

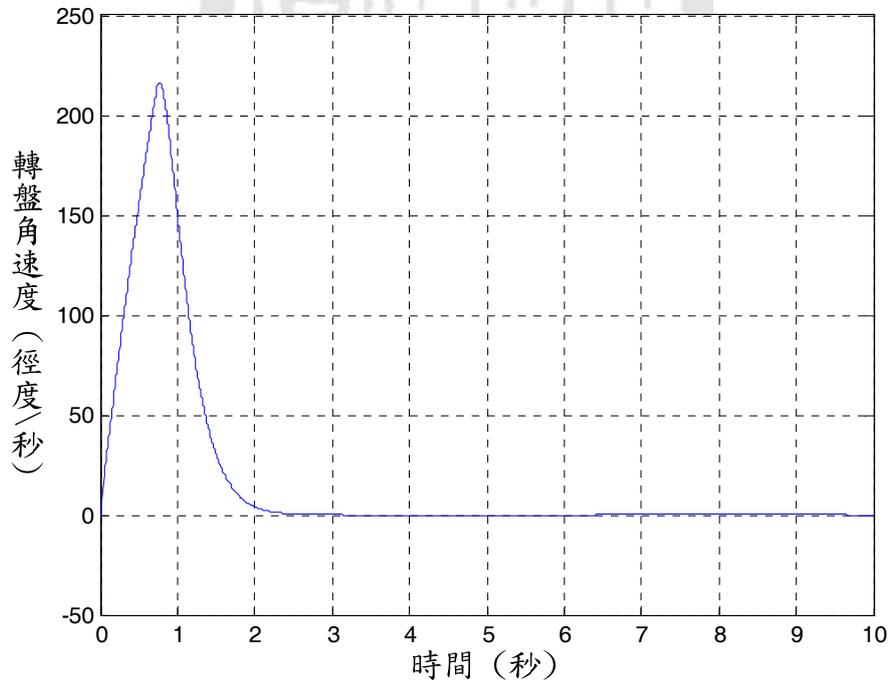


圖 5-13 LQR 控制器之轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ )

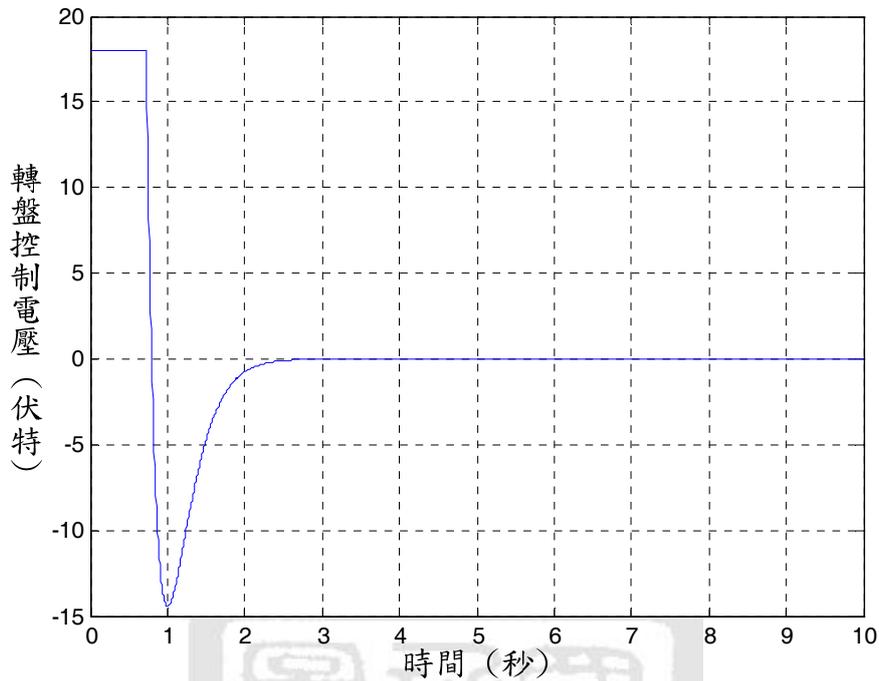


圖 5-14 LQR 控制器之轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ )

接下來，吾人將初始條件設定為

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7]^T = [0.04 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.04 \ 0 \ 0]^T \quad (5-16)$$

其代表之意義為單輪車系統向前傾斜 0.04 徑度，向左傾斜 0.04 徑度，經 LQR 控制器後，單輪車前後傾角模擬響應如圖 5-15，車輪角度模擬響應如圖 5-16，車輪控制電壓模擬響應如圖 5-17，單輪車左右傾角模擬響應如圖 5-18，轉盤角速度模擬響應如圖 5-19，轉盤控制電壓模擬響應如圖 5-20，單輪車偏向角模擬響應如圖 5-21，由圖 5-15、圖 5-18 知系統可以平衡，除此之外，由圖 5-21 可知當單輪車系統有側傾角的情況下，且系統前後移動時，偏向角度  $\gamma$  會隨之改變，而側傾角度收斂時，偏向角度將不再改變，此動態與實際物理現象相符，也可由此模擬現象，再次驗證吾人單輪車系統數學模型之正確性。

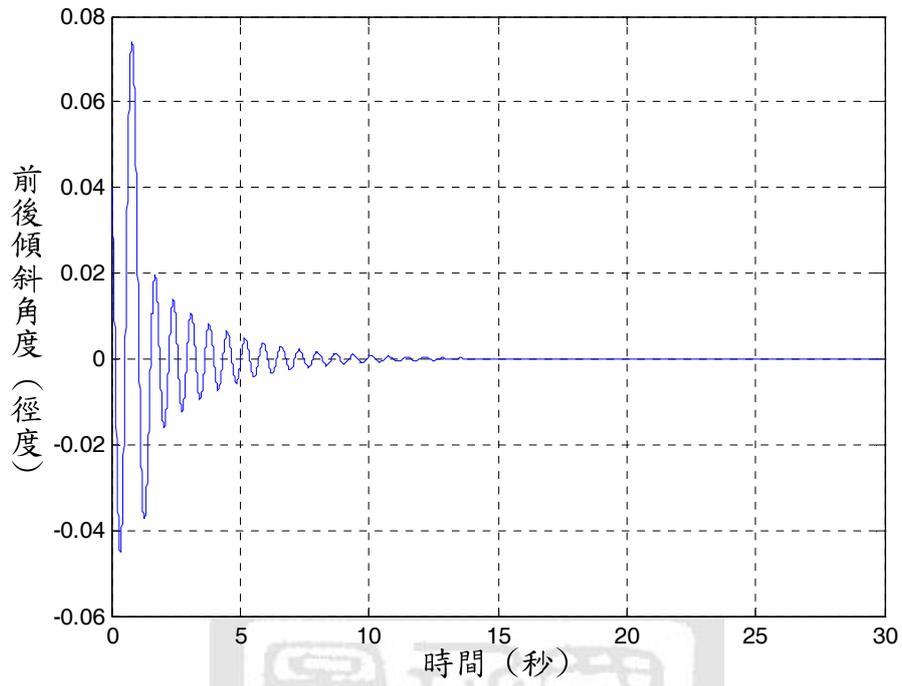


圖 5-15 LQR 控制器之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ )

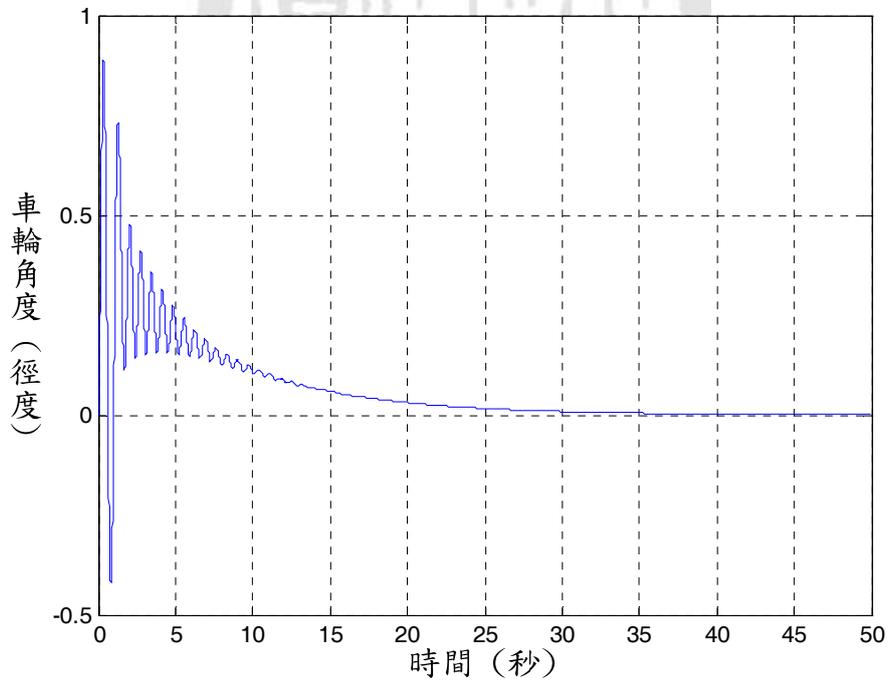


圖 5-16 LQR 控制器之車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ )

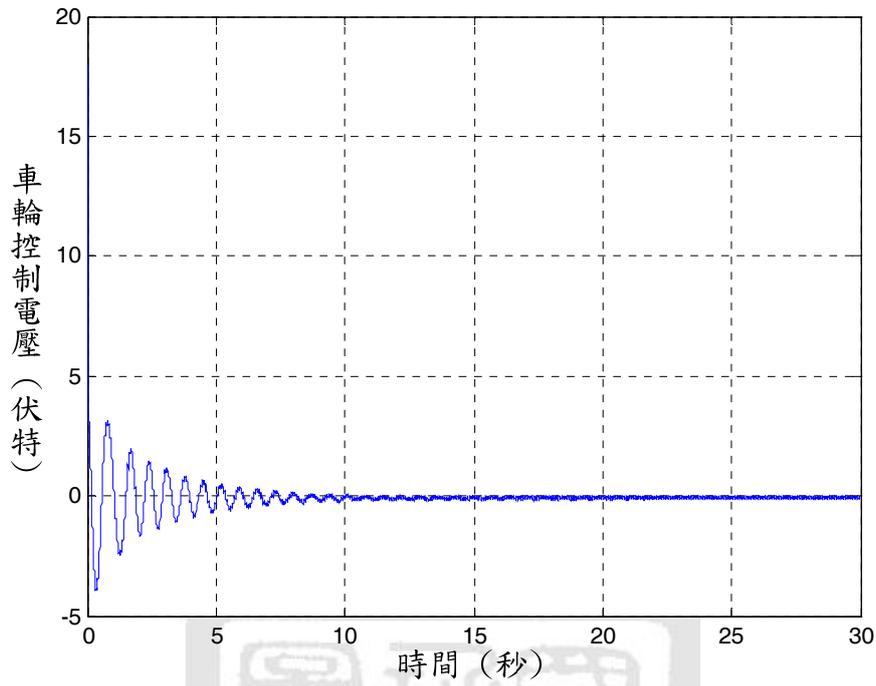


圖 5-17 LQR 控制器之車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ )

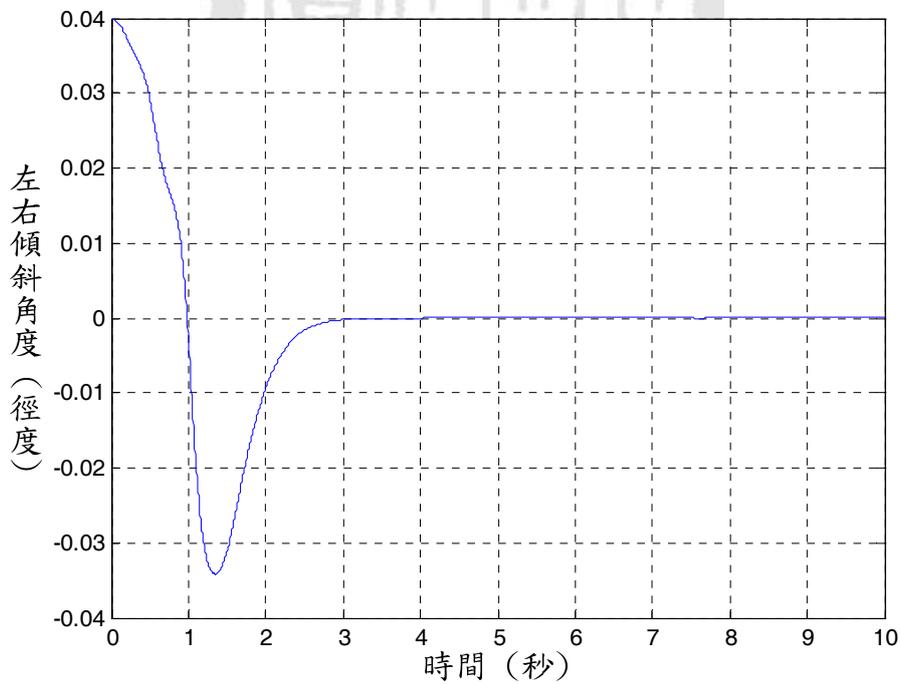


圖 5-18 LQR 控制器之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ )

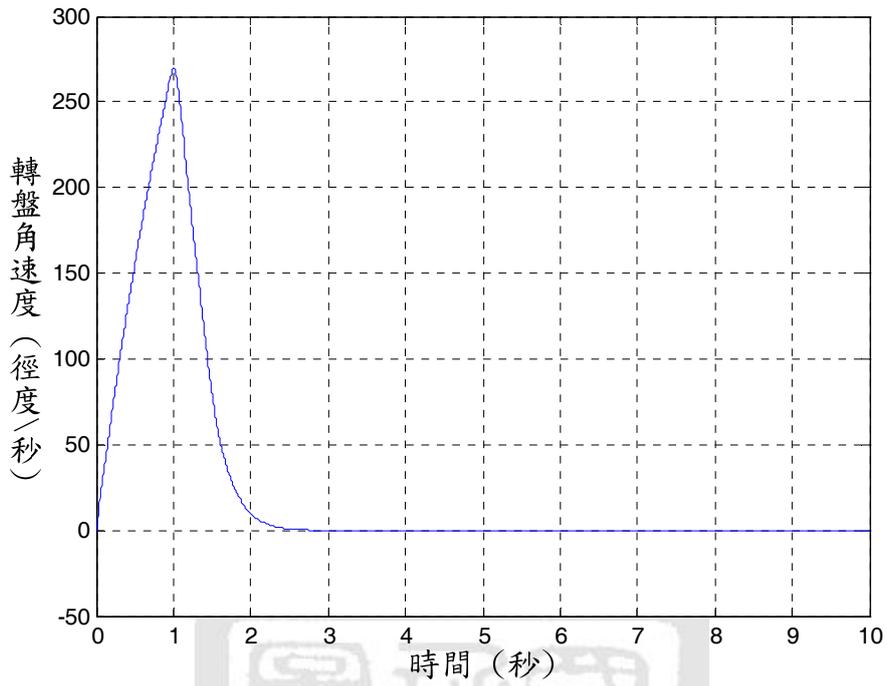


圖 5-19 LQR 控制器之轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ )

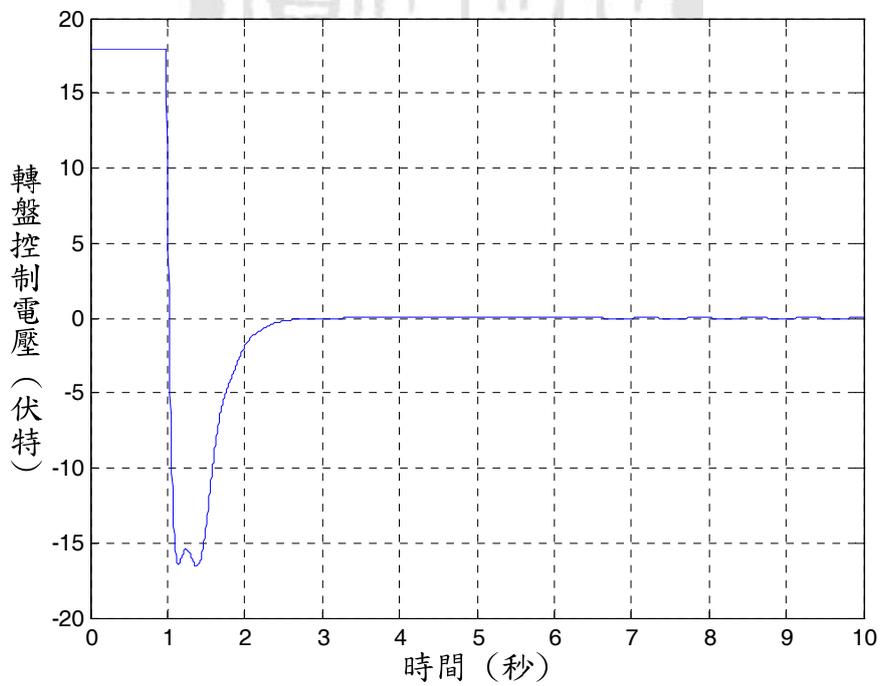


圖 5-20 LQR 控制器之轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ )

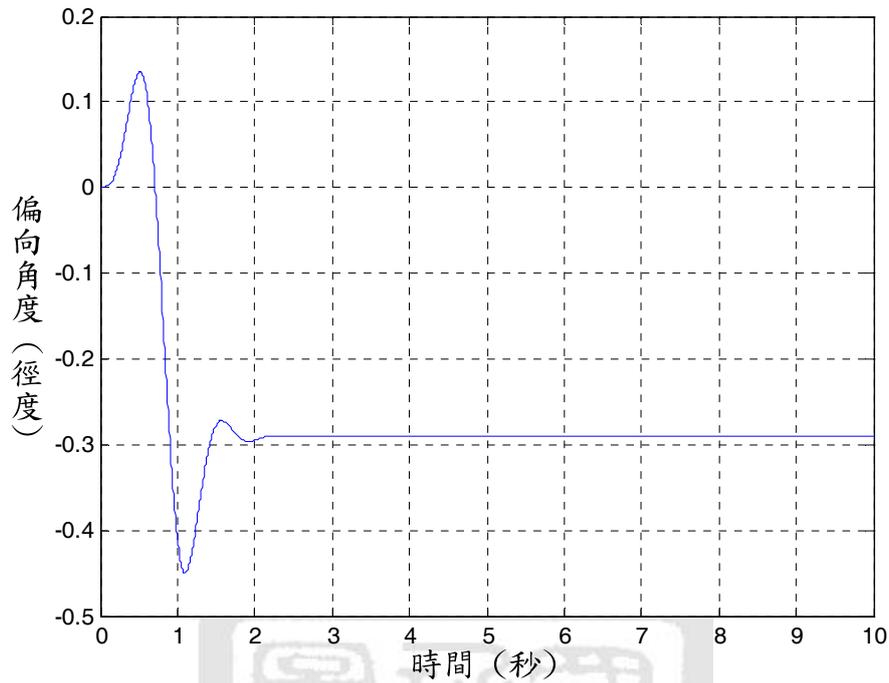


圖 5-21 LQR 控制器之單輪車偏向角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.04, \beta(0)=0.04$ )

### 5-3 全狀態回授線性化控制器之設計與模擬

由第二章吾人可知在平衡點附近時，可將系統解耦合為兩個方向的子系統，此節將對解耦合後之慣性輪倒單擺系統做全狀態回授線性化並將線性化後所得之線性系統以 LQR 控制器加以控制。由(2-125) ~ (2-134) 式，吾人可得知慣性輪子系統其狀態空間表示式為

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5-17)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{G_d \sin(x_1)}{D - I_{dx}} + \frac{R_m K_r x_4}{D - I_{dx}} - \frac{R_m e_d}{D - I_{dx}} \quad (5-18)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (5-19)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{G_d \sin(x_1)}{D - I_{dx}} - \frac{DR_m K_t x_4}{I_{dx}(D - I_{dx})} + \frac{DR_m e_d}{I_{dx}(D - I_{dx})} \quad (5-20)$$

由上四式中，吾人可知轉盤角度  $x_3$  與其他動態方程式並無關聯，且實際上轉盤的角度位置並不會影響系統平衡，也為了提升平衡控制之性能，故吾人將轉盤角度狀態捨去。捨去後令狀態空間為  $Z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T = [x_1 \ x_2 \ x_4]^T$ ，接著吾人可將狀態空間表示式重新整理為

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (5-21)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{G_d \sin(z_1)}{D - I_{dx}} + \frac{R_m K_t z_3}{D - I_{dx}} - \frac{R_m e_d}{D - I_{dx}} \quad (5-22)$$

$$\dot{z}_3 = -\frac{G_d \sin(z_1)}{D - I_{dx}} - \frac{DR_m K_t z_3}{I_{dx}(D - I_{dx})} + \frac{DR_m e_d}{I_{dx}(D - I_{dx})} \quad (5-23)$$

並表示成下列之形式

$$\dot{z} = f(z) + g(z)e_d \quad (5-24)$$

其中

$$f(z) = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{G_d \sin(z_1)}{D - I_{dx}} + \frac{R_m K_t z_3}{D - I_{dx}} \\ -\frac{G_d \sin(z_1)}{D - I_{dx}} - \frac{DR_m K_t z_3}{I_{dx}(D - I_{dx})} \end{bmatrix} ; \quad g(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{R_m}{D - I_{dx}} \\ \frac{R_m D}{I_{dx}(D - I_{dx})} \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

接著檢視系統是否可全狀態回授線性化。首先計算相關 Lie bracket  $[f, g]$  如下：

$$ad_f^0 g(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{R_m}{D - I_{dx}} \\ \frac{R_m D}{I_{dx}(D - I_{dx})} \end{bmatrix} \quad (5-26)$$

$$ad_f^1 g(z) = \begin{bmatrix} -\frac{R_m}{D - I_{dx}} \\ \frac{R_m^2 D k_t}{I_{dx}(D - I_{dx})^2} \\ -\frac{D^2 R_m^2 k_t}{I_{dx}^2 (D - I_{dx})^2} \end{bmatrix} \quad (5-27)$$

$$ad_f^2 g(z) = \begin{bmatrix} \frac{R_m^2 D k_t}{I_{dx}(D - I_{dx})^2} \\ \frac{-G_d R_m \cos(z_1)}{(D - I_{dx})^2} - \frac{D^2 R_m^3 k_t^2}{I_{dx}^2 (D - I_{dx})^3} \\ \frac{G_d R_m \cos(z_1)}{(D - I_{dx})^2} + \frac{D^3 R_m^3 k_t^2}{I_{dx}^3 (D - I_{dx})^3} \end{bmatrix} \quad (5-28)$$

令  $G(z) = [g(z) \quad ad_f g(z) \quad ad_f^2 g(z)]$ ，計算可得

$$\det(G(z)) = -\frac{R_m^3 G_d}{I_{dx}(D - I_{dx})^3} \cos(z_1) \quad (5-29)$$

並令

$$\Omega = \left\{ z \in R^3 \mid -\frac{\pi}{2} < z_1 < \frac{\pi}{2} \right\} \quad (5-30)$$

由表 5-1 系統物理參數可知

$$\frac{R_m^3 G_d}{I_{dx}(D - I_{dx})^3} \neq 0 \quad (5-31)$$

則得知，在  $\Omega$  中  $G(z)$  是滿秩(full rank)。接著檢驗是否符合 involutive 之條件。

$$\begin{bmatrix} g(z) & ad_f g(z) \end{bmatrix} = \frac{\partial ad_f g(z)}{\partial z} g(z) - \frac{\partial g}{\partial z} ad_f g(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-32)$$

由(5-32)式可得知

$$\begin{bmatrix} g, & ad_f g \end{bmatrix} \in \text{span} \{ g(z) - ad_f g(z) \} \quad (5-33)$$

故  $\text{span} \{ g(z) - ad_f g(z) \}$  在  $\Omega$  中是 involutive。綜合上述條件，吾人得知慣性輪倒單擺子系統為一個可全狀態回授線性化之系統。同時要使系統能轉換成(3-28)式的形式，必須找到一個函數  $h(z)$  滿足

$$\begin{cases} L_g h(z) = 0 \\ L_g L_f h(z) = 0 \\ L_g L_f^2 h(z) \neq 0 \end{cases} \quad (5-34)$$

並依據[8]之結果，吾人選取

$$y = h(z) = Dz_2 + I_{dx} z_3 \quad (5-35)$$

接著將(5-34)式做多次微分，直到出現控制力  $e_d$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= L_f h(z) + L_g h(z) e_d \\ &= \begin{bmatrix} 0 & D & I_{dx} \end{bmatrix} f(z) + \begin{bmatrix} 0 & D & I_{dx} \end{bmatrix} g(z) e_d \\ &= G_d \sin(z_1) + 0\end{aligned}\quad (5-36)$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= L_f^2 h(z) + L_g L_f h(z) e_d \\ &= \begin{bmatrix} G_d \cos(z_1) & 0 & 0 \end{bmatrix} f(z) + \begin{bmatrix} G_d \cos(z_1) & 0 & 0 \end{bmatrix} g(z) e_d \\ &= z_2 G_d \cos(z_1) + 0\end{aligned}\quad (5-37)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\ddot{y}} &= L_f^3 h(z) + L_g L_f^2 h(z) e_d \\ &= -z_2^2 G_d \sin(z_1) + \frac{G_d^2 \cos(z_1) \sin(z_1)}{D - I_{dx}} \\ &\quad + \frac{G_d \cos(z_1) R_m K_t z_3}{D - I_{dx}} - \frac{G_d \cos(z_1) R_m e_d}{D - I_{dx}}\end{aligned}\quad (5-38)$$

由上列運算得知在  $-\frac{\pi}{2} < z_1 < \frac{\pi}{2}$  中  $L_g L_f^2 h \neq 0$ ，故此系統的相對階數(relative degree)為 3。接著定義新的狀態變數如下

$$\begin{aligned}\xi_1 &= y = h(z) = Dz_2 + I_{dx} z_3 \\ \xi_2 &= \dot{y} = L_f h(z) = G_d \sin(z_1) \\ \xi_3 &= \ddot{y} = L_f^2 h(z) = z_2 G_d \cos(z_1)\end{aligned}\quad (5-39)$$

並將(5-38)式以及(5-39)式微分整理得

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (5-40)$$

$$\dot{\xi}_2 = \xi_3 \quad (5-41)$$

$$\dot{\xi}_3 = L_f^3 h + L_g L_f^2 h(z) e_d \quad (5-42)$$

為了消除非線性部份，故令  $e_d$  為

$$e_d = \frac{1}{L_g L_f^2 h(z)} [u_e - L_f^3 h(z)] \quad (5-43)$$

則吾人可獲得一可控(controllable)線性系統如下

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (5-44)$$

$$\dot{\xi}_2 = \xi_3 \quad (5-45)$$

$$\dot{\xi}_3 = u_e \quad (5-46)$$

而控制力  $u_e$  之設計，吾人將採用 LQR 控制來設計。由 5-2 節中吾人知控制力  $u_e$  為

$$u_e = -K_d z(t) \quad (5-47)$$

並選定適當的  $Q_d$  與  $R_d$  值如下

$$Q_d = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} ; \quad R_d = [0.5] \quad (5-48)$$

在經由 MATLAB 進行 LQR 控制器設計而得到最佳回授增益  $K_d$  矩陣

$$K_d = [14.1421 \quad 13.7168 \quad 5.2379] \quad (5-49)$$

此時系統之特徵值為(5-50)式，可知系統穩定。

$$E_d = \{-1.655 + j2.1439, -1.655 - j2.1439, -1.9279\} \quad (5-50)$$

接下來以 MATLAB/Simulink 模擬全狀態回授線性化後控制器之控制系統響應，而模擬時的系統物理參數採用表 5-1，整體控制方塊圖如圖 5-22。

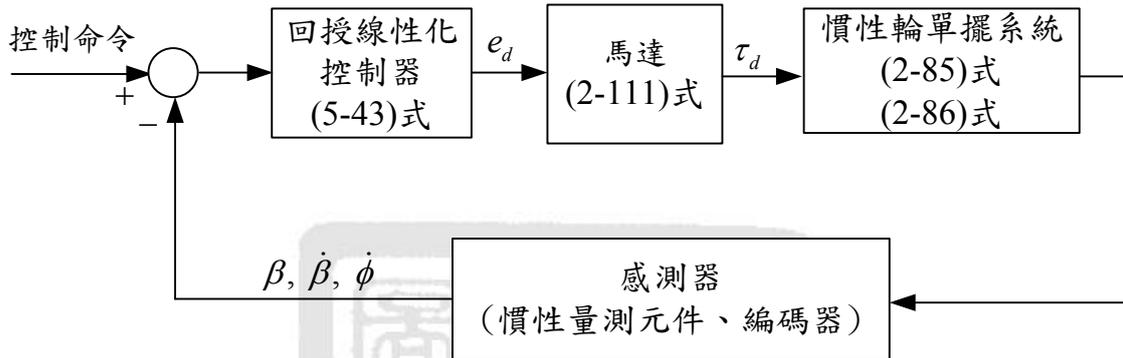


圖 5-22 回授線性化控制器控制方塊圖

首先，吾人設定單輪車系統的初始條件為  $[\alpha \ \theta \ \dot{\alpha} \ \dot{\theta} \ \beta \ \dot{\beta} \ \dot{\phi}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.04 \ 0 \ 0]^T$ ，另外，平衡控制中不考慮之狀態初始值設為  $[\phi \ \gamma \ \dot{\gamma}]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ ，而在此初始條件下，由系統動態方程式(2-79)式可知，單輪車系統之前後動態與偏向角度將恆為零，也就是單輪車系統在此初始條件下可視為一慣性輪單擺系統，故接下來將只提供系統左右動態之模擬響應圖。圖 5-23 為左右傾角模擬響應圖，圖 5-24 為轉盤角速度模擬響應圖，圖 5-25 為轉盤控制電壓模擬響應圖。由模擬可知，控制電壓除了一開始的短暫飽和外，其餘均屬理想範圍，且系統穩定。

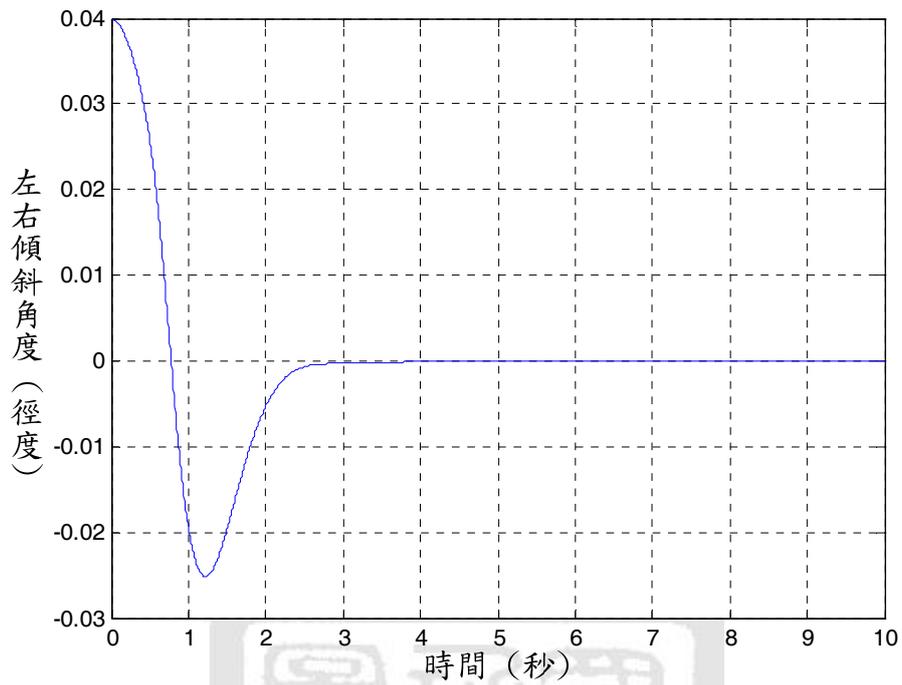


圖 5-23 回授線性化之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ )

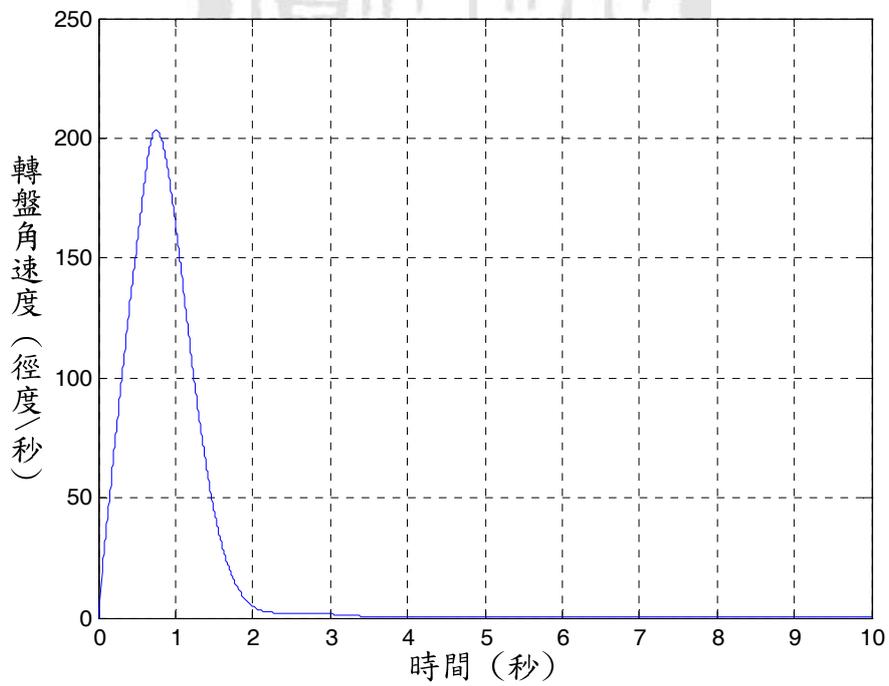


圖 5-24 回授線性化之轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ )

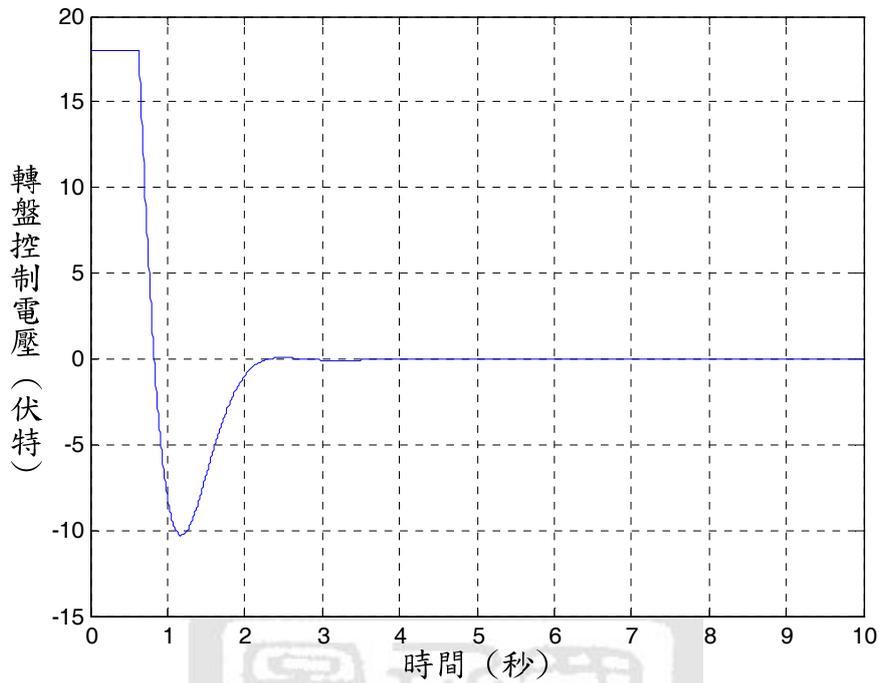


圖 5-25 回授線性化之轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.04$ )

#### 5-4 順滑模態控制器之設計與模擬

由第二章吾人得知在平衡點附近時，可將系統解耦合為兩個方向的子系統，此節將對解耦合後之輪型倒單擺系統進行順滑模態控制器之設計與模擬。

由(2-135)式以及(2-136)式，吾人可得知輪型倒單擺系統其動態方程式如下

$$\begin{aligned}
 & (m_d l^2 + \frac{1}{4} m_b l^2 + I_{dy} + I_{by}) \ddot{\alpha} + (m_d l l_{rad} \cos \alpha + \frac{1}{2} m_b l l_r \cos \alpha) \ddot{\theta} \\
 & - (m_d g l \sin \alpha + \frac{1}{2} m_b g l \sin \alpha) = 0
 \end{aligned} \tag{5-51}$$

$$\begin{aligned}
& (m_d ll_r \cos \alpha + \frac{1}{2} m_b ll_r \cos \alpha) \ddot{\alpha} + (m_w l_r^2 + m_d l_r^2 + m_b l_r^2 + I_{wy}) \ddot{\theta} \\
& - (m_d ll_r \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + m_b \frac{1}{2} ll_r \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) + \frac{K_t^2}{R_a} \dot{\theta} = \frac{K_t}{R_a} e_w
\end{aligned} \tag{5-52}$$

首先將(5-51)式、(5-52)式整理為

$$\ddot{\alpha} = \frac{HG_w \sin(\alpha) - N^2 \dot{\alpha}^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) + R_m K_t N \dot{\theta} \cos(\alpha) - R_m N \cos(\alpha) e_w}{MH - N^2 \cos^2(\alpha)} \tag{5-53}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-NG_w \cos(\alpha) \sin(\alpha) + MN \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha) - MR_m K_t \dot{\theta} + MR_m e_w}{MH - N^2 \cos^2(\alpha)} \tag{5-54}$$

其中  $MH - N^2 \cos^2(\alpha) \neq 0$ ，而參數如第二章所示。由(5-53)式、(5-54)式將

控制力矩陣整理為

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{MR_m}{MH - N^2 \cos^2 \alpha} \\ -R_m N \cos \alpha \\ \frac{MR_m}{MH - N^2 \cos^2 \alpha} \end{bmatrix} \tag{5-55}$$

為了將系統轉換成正規化(4-31)的形式，利用變數變換的關係

$$\begin{aligned}
y &= \sigma(\theta, \alpha) \\
&= \theta - \varphi(\alpha)
\end{aligned} \tag{5-56}$$

將(5-56)式微分可得

$$\dot{y} = \dot{\theta} - \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha} \tag{5-57}$$

令

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\tilde{B}_1}{\tilde{B}_2} = -\frac{M}{N \cos \alpha} \quad (5-58)$$

再由(5-58)式積分得

$$\varphi(\alpha) = -\frac{M}{N} \cdot \ln \frac{1 + \tan(\alpha/2)}{1 - \tan(\alpha/2)} \quad (5-59)$$

將(5-58)式代入(5-57)式可得

$$\dot{y} = \dot{\theta} + \frac{M}{N \cos \alpha} \dot{\alpha} \quad (5-60)$$

將(5-60)式微分可求得

$$\ddot{y} = \ddot{\theta} + \frac{M \sin \alpha}{N \cos^2 \alpha} \dot{\alpha}^2 + \frac{M}{N \cos \alpha} \ddot{\alpha} \quad (5-61)$$

將(5-53)式、(5-54)式以及(5-61)式整理成正規化形式

$$\ddot{y} = G_s(\alpha, \dot{\alpha}) \tan(\alpha) \quad (5-62)$$

$$\ddot{\alpha} = v(\alpha, \dot{\alpha}, e_w) \quad (5-63)$$

其中

$$G_s(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{g}{l_r} + \frac{M}{N \cos \alpha} \dot{\alpha}^2 \quad (5-64)$$

$$v(\alpha, \dot{\alpha}, e_w) = \frac{HG_w \sin(\alpha) - N^2 \dot{\alpha}^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) + R_m N \cos(\alpha) (K_t \dot{\theta} - e_w)}{MH - N^2 \cos^2(\alpha)} \quad (5-65)$$

接著吾人選擇順滑面為

$$S_0(\alpha, \dot{\alpha}, y, \dot{y}) = [\cos^2(\alpha)]\dot{S}_1 + \delta S_1 = 0 \quad (5-66)$$

其中  $\delta > 0$ ，且

$$S_1 = \tan(\alpha) + \delta_1(y + \dot{y}) \quad (5-67)$$

其中  $\delta_1 > 0$ 。由(5-66)式，當系統動態在順滑面  $S_0$  上，且  $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$  時

$$S_1 = \tan(\alpha) + \delta_1(y + \dot{y}) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty \quad (5-68)$$

也就是系統動態在順滑面  $S_0$  上時， $S_1$  會收斂到零。當  $S_1$  收斂到零時，則

$$\tan(\alpha) + \delta_1(y + \dot{y}) = 0 \quad (5-69)$$

由(5-62)式以及(5-69)式可得

$$\ddot{y} = -\delta_1 G_s(\alpha, \dot{\alpha})(y + \dot{y}) \quad (5-70)$$

再令

$$\xi = y + \dot{y} \quad (5-71)$$

由(5-71)式可得

$$\dot{y} = -y + \xi \quad (5-72)$$

將(5-71)式微分整理可得

$$\dot{\xi} = -y + [1 - \delta_1 G_s(\alpha, \dot{\alpha})]\xi \quad (5-73)$$

因此考慮系統動態(5-72)式及(5-73)式，

$$\begin{cases} \dot{y} = -y + \xi \\ \dot{\xi} = -y + [1 - \delta_1 G_s(\alpha, \dot{\alpha})]\xi \end{cases}$$

選取 Lyapunov 候選函數為

$$V = \frac{1}{2}(y^2 + \xi^2) \quad (5-74)$$

將 Lyapunov 候選函數微分後如下

$$\begin{aligned} \dot{V} &= y\dot{y} + \xi\dot{\xi} \\ &= -y^2 - (\delta_1 G_s(\alpha, \dot{\alpha}) - 1)\xi^2 \end{aligned} \quad (5-75)$$

因為在  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  條件下  $G_s(\alpha, \dot{\alpha}) > 0$ ，如果在選擇數值夠大的  $\delta_1$  即可滿足  $\delta_1 > \frac{1}{G_s(\alpha, \dot{\alpha})} > 0$ ，則使得  $\dot{V} < 0$ 。而這也代表(5-62)式為漸近穩定 (asymptotically stable) 且當  $t \rightarrow \infty$  時  $y \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0$ 。因此從(5-56)式、(5-59)式以及(5-69)式，吾人可得當  $t \rightarrow \infty$  時  $(\alpha, \theta) \rightarrow (0, 0)$ 。由上述之結果吾人可知當系統動態落在順滑面  $S_0$  時，倒單擺系統(5-62)式及(5-63)式之狀態可收斂至平衡點。

接著由(5-66)式微分可得

$$\dot{S}_0 = \psi(\alpha, \dot{\alpha})v(\alpha, \dot{\alpha}, e_w) + F(\alpha, \dot{\alpha}, y) \quad (5-76)$$

其中

$$\psi(\alpha, \dot{\alpha}) = 1 + 2\delta_1 \dot{\alpha} \frac{M}{N} \sin \alpha \quad (5-77)$$

$$\begin{aligned}
F(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{y}) = & \delta_1 G_s(\alpha, \dot{\alpha}) \cos^2(\alpha) \tan(\alpha) + \delta \dot{S}_1 + \delta_1 G_s(\alpha, \dot{\alpha}) \dot{\alpha} \\
& - 2\delta_1 G_s(\alpha, \dot{\alpha}) \dot{\alpha} \sin^2(\alpha) - 2\delta_1 \dot{y} \dot{\alpha} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\
& + \delta_1 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \left( \frac{M}{N} \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \dot{\alpha}^2 \right) \dot{\alpha}
\end{aligned} \tag{5-78}$$

接下來將決定控制力使任何初始條件接觸到順滑面  $S_0$  時，必須滿足下列順滑條件以保證系統之動態一直停留在順滑面  $S_0$  上

$$S_0 \dot{S}_0 < 0 \tag{5-79}$$

故將(5-76)式代入(5-79)式，可得

$$S_0(\psi(\alpha, \dot{\alpha})v(\alpha, \dot{\alpha}, e_w) + F(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{y})) < 0 \tag{5-80}$$

將(5-80)式中的  $v(\alpha, \dot{\alpha}, e_w)$  令為

$$v(\alpha, \dot{\alpha}, e_w) = -V_o \operatorname{sgn}(S_0 \psi(\alpha, \dot{\alpha})) \tag{5-81}$$

其中

$$V_o \geq \frac{|F|_{\max}}{|\psi|_{\min}} \tag{5-82}$$

將(5-81)式代入(5-80)式可得

$$S_0 \left[ \psi(\alpha, \dot{\alpha}) \left( -\frac{|F|_{\max}}{|\psi|_{\min}} \operatorname{sgn}(S_0 \psi(\alpha, \dot{\alpha})) \right) + F(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{y}) \right] < 0 \tag{5-83}$$

由(5-83)式可知，當  $\psi(\alpha, \dot{\alpha}) \neq 0$  時，順滑模態成立。為了避免  $\psi(\alpha, \dot{\alpha}) = 0$  的

狀況發生，由(5-76)式中的 $\psi(\alpha, \dot{\alpha})$ 檢驗可知系統狀態收斂範圍可用下列

(5-84)式與(5-85)式來近似

$$1 + 2\delta_1 \dot{\alpha} \frac{M}{N} \sin \alpha > 0 \quad (5-84)$$

$$\dot{\psi}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) > 0 \quad (5-85)$$

其中平衡點滿足(5-84)式，將(5-77)式中的 $\psi(\alpha, \dot{\alpha})$ 微分後代入(5-85)式可得

$$2\delta_1 \frac{M}{N} (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) > 0 \quad (5-86)$$

從(5-84)式又知

$$\dot{\alpha} > -\frac{N}{2\delta_1 M \sin \alpha} \quad (5-87)$$

將(5-87)式以及(5-63)式代入(5-86)式可得

$$2\delta_1 \frac{M}{N} [-V_o \operatorname{sgn}(S_o \psi(\alpha, \dot{\alpha})) \sin \alpha + \frac{N^2 \cos \alpha}{4\delta_1^2 M^2 \sin^2 \alpha}] > 0 \quad (5-88)$$

若(5-88)式要成立則必滿足

$$\frac{N^2 \cos \alpha}{4\delta_1^2 M^2 \sin^2 \alpha} > V_o \sin \alpha \quad (5-89)$$

若滿足(5-89)式條件，則 $\psi(\varphi, \dot{\varphi}) > 0$ ，順滑條件成立。最後由(5-65)式以及(5-81)式整理可得控制力

$$e_w = \frac{1}{R_m N \cos \alpha} [-N^2 \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \sin \alpha + R_m K_t N \dot{\theta} \cos \alpha + HG \sin \alpha + V_o (MH - N^2 \cos^2 \alpha) \text{sgn}(S_0 \psi(\alpha, \dot{\alpha}))] \quad (5-87)$$

為防止控制力輸出造成的切跳現象過大，吾人利用飽和函數 sat 代替 sgn 函數將控制力  $e_w$  修正為

$$e_w = \frac{1}{R_m N \cos \alpha} [-N^2 \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \sin \alpha + R_m K_t N \dot{\theta} \cos \alpha + HG \sin \alpha + V_o (MH - N^2 \cos^2 \alpha) \text{sat}\left(\frac{S_0 \psi(\alpha, \dot{\alpha})}{\varepsilon}\right)] \quad (5-88)$$

接下來將針對吾人所設計之控制力以 MATLAB/Simulink 加以模擬，以觀察考慮非線性項的控制器其對系統的控制效能及可行性，模擬中系統物理參數如表 5-1 所示，整體順滑模態控制器的控制方塊圖如圖 5-26 所示。

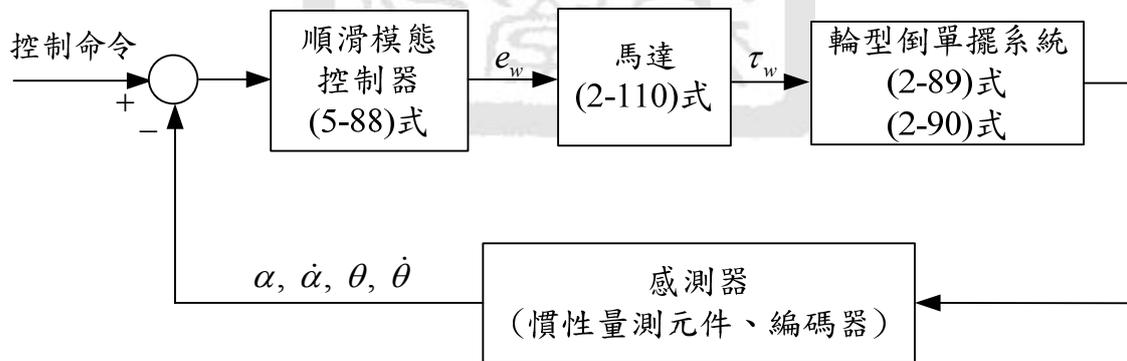


圖 5-26 順滑模態控制器控制方塊圖

吾人選取控制力參數  $V_o = 20$  ;  $\delta_1 = 2$  ;  $\delta = 0.1$ ，並設定單輪車系統初始條件為  $[\alpha \quad \theta \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\theta} \quad \beta \quad \dot{\beta} \quad \dot{\phi}]^T = [0.06 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ ，在此初始狀態下，代表單輪車向前傾斜 0.06 徑度。另外，平衡控制中不加以考慮之

轉盤角度  $\phi$ 、偏向角度  $\gamma$  以及偏向角角速度  $\dot{\gamma}$  狀態的初始狀態設定為  $[\phi \ \gamma \ \dot{\gamma}]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ ，在此初始條件下，由單輪車系統動態方程式(2-79)式可知，單輪車系統之  $\beta$  相關動態、 $\phi$  相關動態、 $\gamma$  相關動態將恆為零，也就是左右姿態、轉盤角度以及偏向角度在整個控制過程中不會有任何改變，即整個單輪車系統在此初始條件下可視為一輪型倒單擺系統，故接下來將只提供前後動態之模擬響應圖。圖 5-27 為順滑模態控制器之單輪車前後傾角模擬響應圖，5-28 為順滑模態控制器之單輪車系統車輪角度模擬響應圖，圖 5-29 順滑模態控制器之車輪控制電壓模擬響應圖，由圖可看出前後傾角收斂速度很快，且控制電壓沒有飽和現象，均屬可實現範圍。

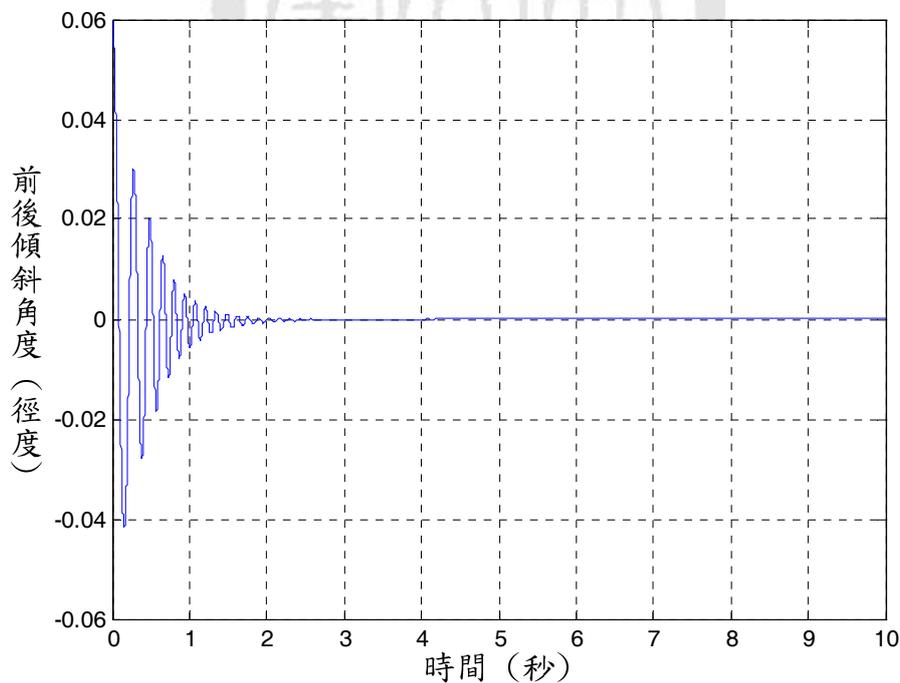


圖 5-27 順滑模態之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ )

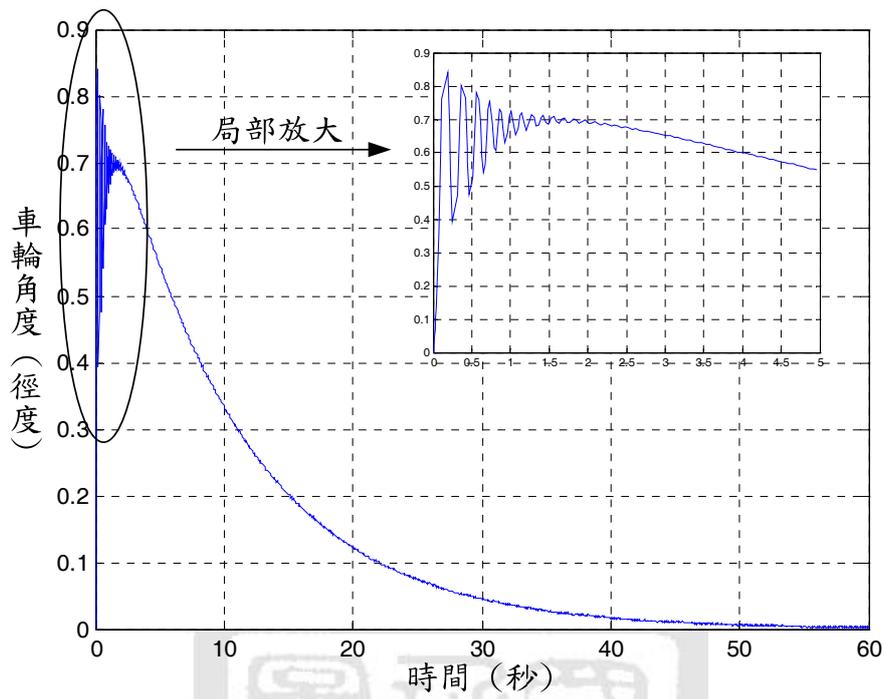


圖 5-28 順滑模態之車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ )

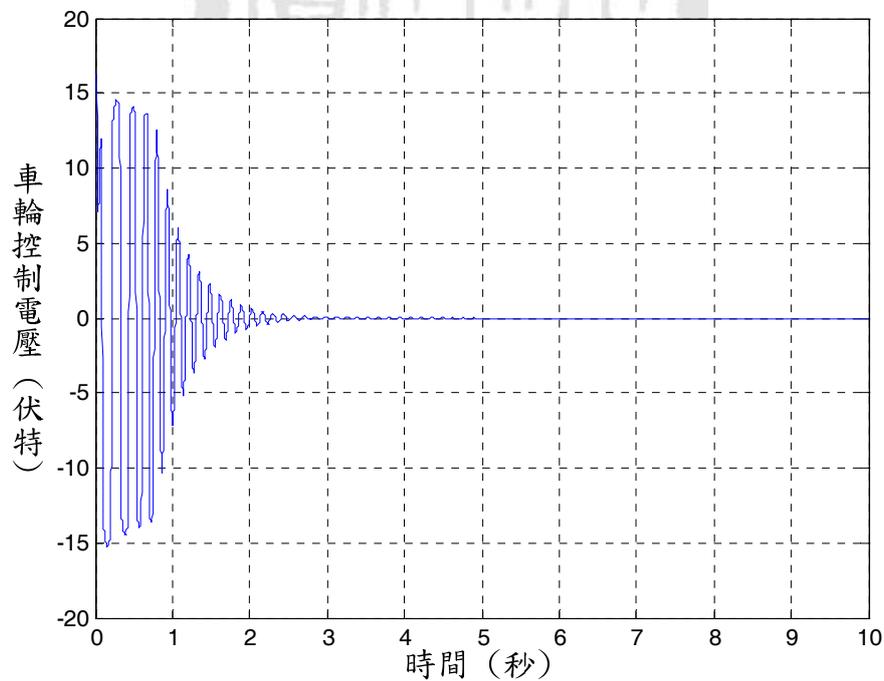


圖 5-29 順滑模態之車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.06, \beta(0)=0$ )

## 5-5 控制器模擬響應比較

本章節吾人將比較各控制器之性能以及強健性。在相同之初始條件下， $[\alpha \ \theta \ \dot{\alpha} \ \dot{\theta} \ \beta \ \dot{\beta} \ \dot{\phi}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.04 \ 0 \ 0]^T$ ，吾人將 LQR 控制器之單輪車系統左右平衡部份與全狀態回授線性化控制器做比較，如圖 5-30 單輪車左右傾角模擬響應圖、圖 5-31 轉盤角速度模擬響應圖、圖 5-32 轉盤控制電壓模擬響應圖，另外，吾人設定在另一相同初始條件下， $[\alpha \ \theta \ \dot{\alpha} \ \dot{\theta} \ \beta \ \dot{\beta} \ \dot{\phi}]^T = [0.06 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ，對 LQR 控制器之單輪車系統前後平衡部分與順滑模態控制器做比較，如圖 5-33 單輪車前後傾角模擬響應圖、圖 5-34 車輪角度模擬響應圖、圖 5-35 車輪控制電壓模擬響應圖。

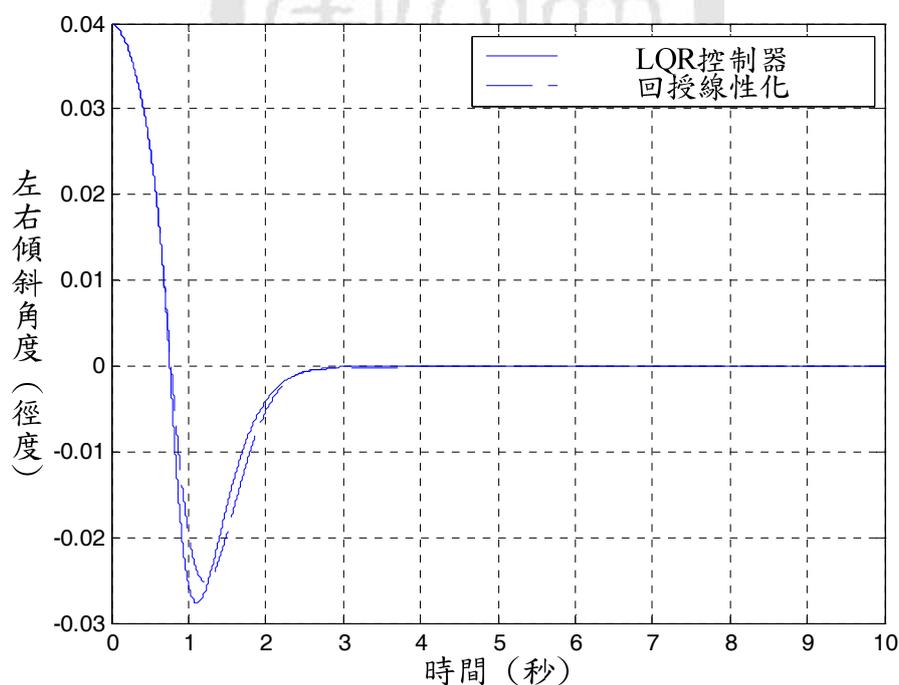


圖 5-30 回授線性化與 LQR 控制器之單輪車左右傾角模擬響應比較圖

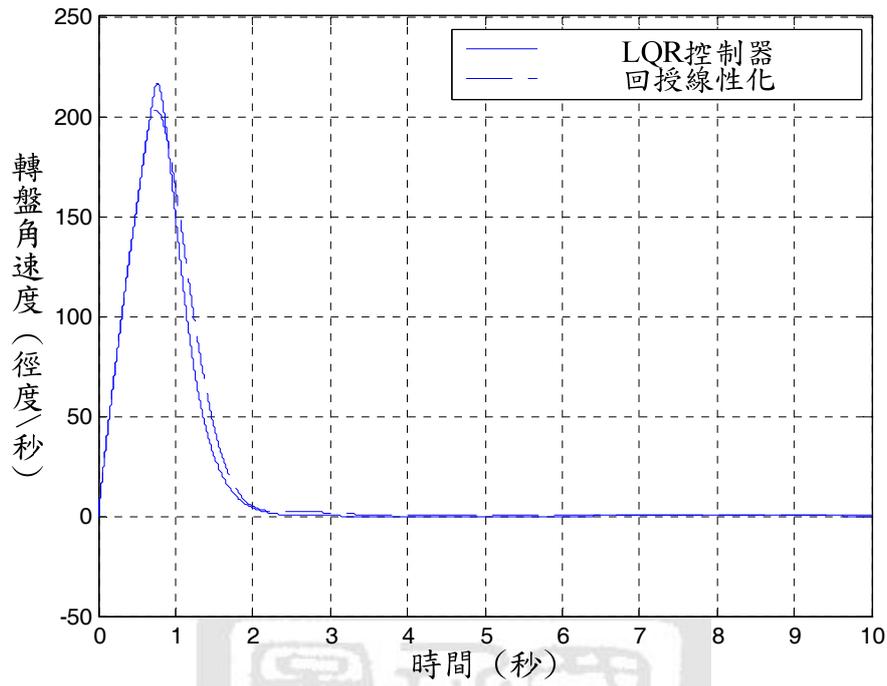


圖 5-31 回授線性化與 LQR 控制器之轉盤角速度模擬響應比較圖

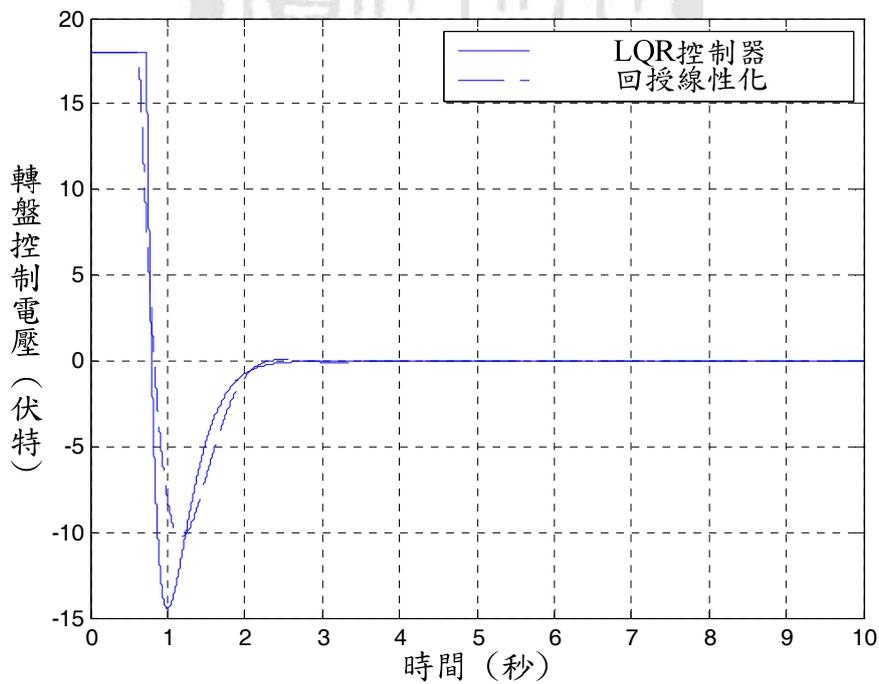


圖 5-32 回授線性化與 LQR 控制器之轉盤控制電壓模擬響應比較圖

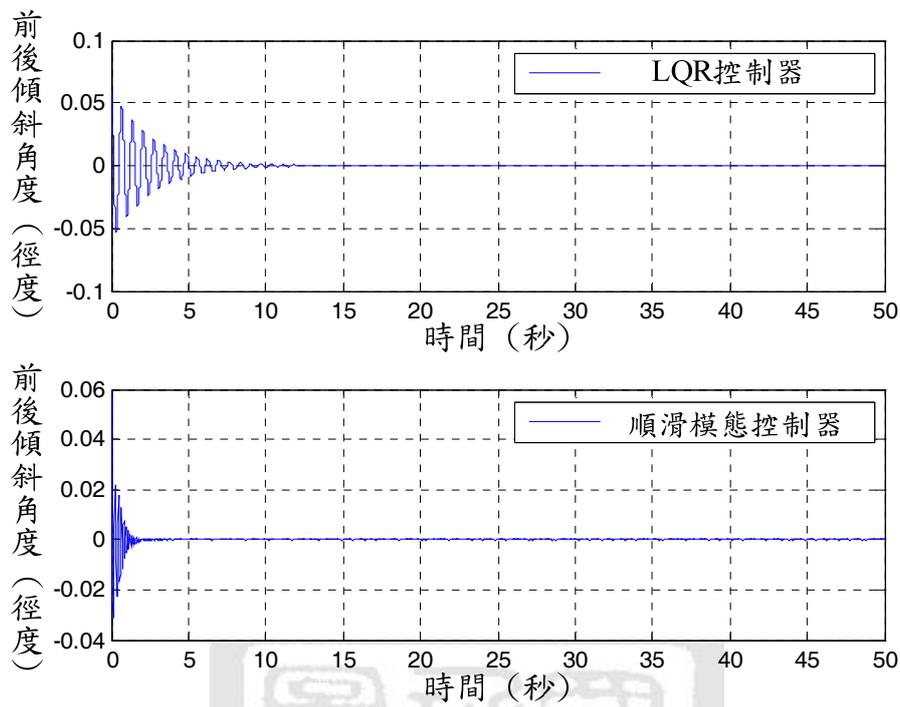


圖 5-33 順滑模態與 LQR 控制器之單輪車前後傾角模擬響應比較圖

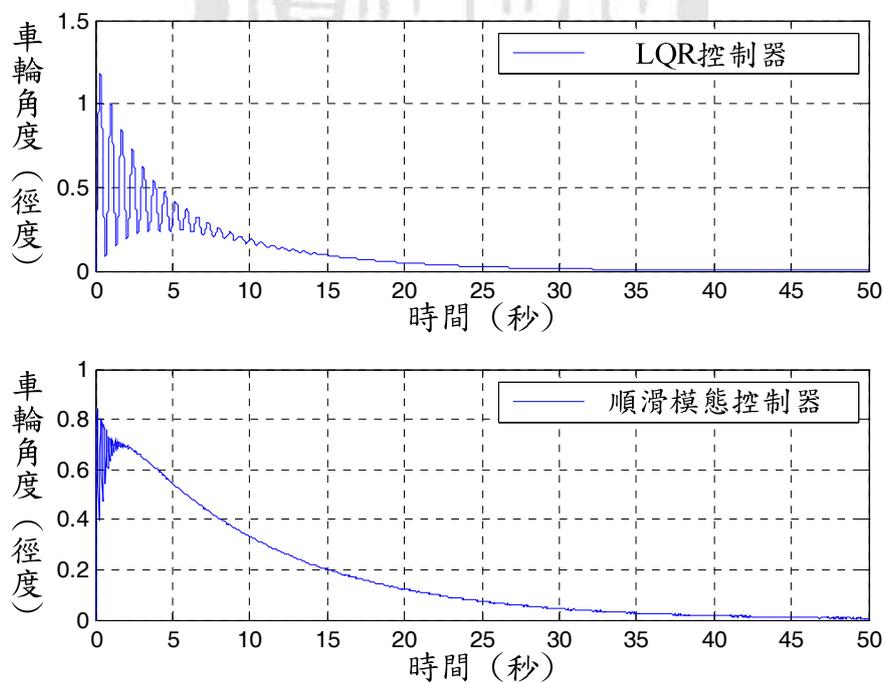


圖 5-34 順滑模態與 LQR 控制器之車輪角度模擬響應比較圖

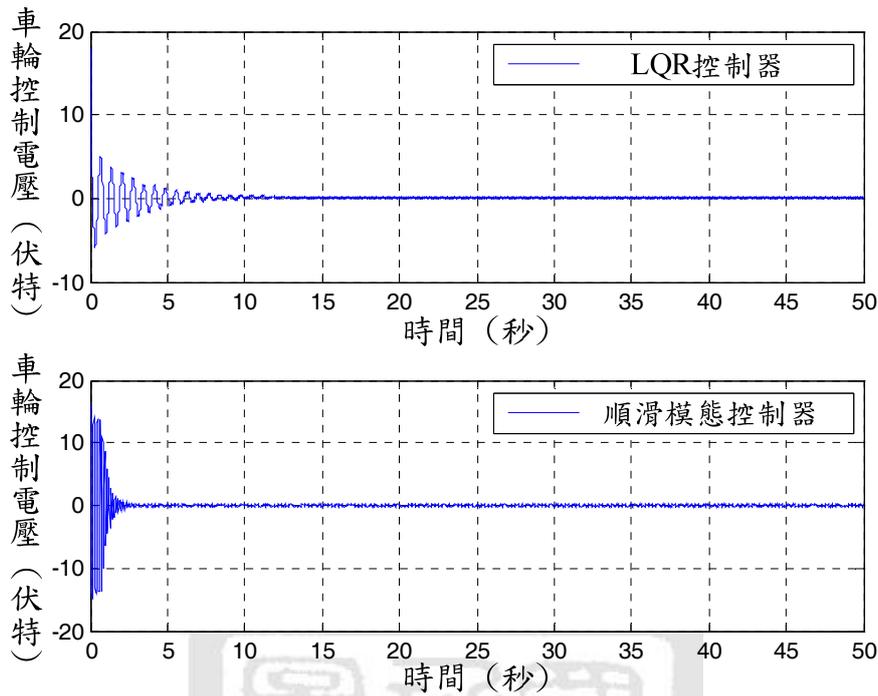


圖 5-35 順滑模態與 LQR 控制器之車輪控制電壓模擬響應比較圖

由模擬響應圖 5-30、圖 5-31、圖 5-32 可看出在左右平衡控制上回授線性化控制器與 LQR 控制器雖然收斂時間差不多，但回授線性化控制器在角速度表現卻是比較好的，而且單純的 LQR 控制器電壓飽和時間比起回授線性化控制器來的長，故全狀態回授線性化控制器性能優於 LQR 控制器。由模擬響應圖 5-33、圖 5-34、圖 5-35，可看出在前後平衡控制上順滑模態控制器收斂速度比 LQR 控制器快很多，但順滑模態控制器輪子角度收斂較慢，但以平衡目的而言，順滑模態控制器性能優於 LQR 控制器。接下來吾人將左右傾角初始位置再多偏離平衡點一些，以比較 LQR 控制器以及回授線性化控制器的強健性，首先，吾人設定初始狀態  $[\alpha \ \theta \ \dot{\alpha} \ \dot{\theta} \ \beta \ \dot{\beta} \ \dot{\phi}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.042 \ 0 \ 0]^T$ ，由圖 5-36 可知 LQR 控制器已發散，但由圖 5-37、圖 5-38 及圖 5-39，可知全狀態回授

線性化控制器還是可以平衡。

由圖 5-36、圖 5-37 的比較，吾人可得知在左右平衡控制上全狀態回授線性化控制器比起單純使用 LQR 控制器更強健，故綜合上述比較，就單輪車左右平衡控制而言，全狀態回授線性化控制器的效能以及強健性均優於 LQR 控制器。

另外吾人將前後傾角偏離平衡點更遠一點，吾人設定初始條件為  $[\alpha \ \theta \ \dot{\alpha} \ \dot{\theta} \ \beta \ \dot{\beta} \ \dot{\phi}]^T = [0.18 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  以比較前後平衡控制器之強健性。由圖 5-40 可看出 LQR 控制器在此狀態下已經發散，反觀圖 5-41、圖 5-42 以及圖 5-43 的順滑模態控制器可看出系統依舊可以平衡，且控制電壓的飽和現象不嚴重，故綜合上述比較，就單輪車前後平衡控制而言，順滑模態的收斂速度以及強健性都優於 LQR 控制器。

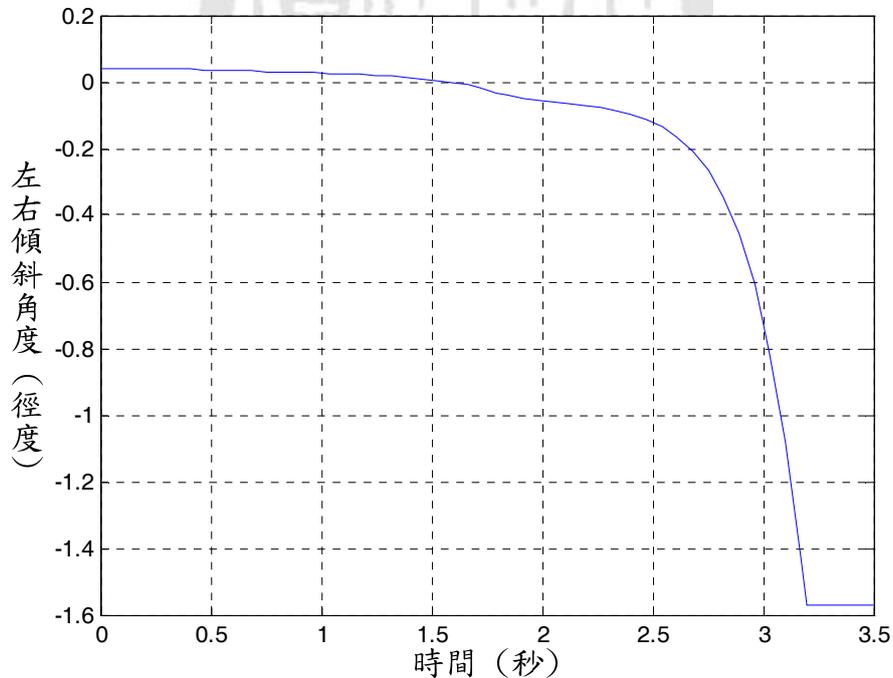


圖 5-36 LQR 控制器之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.042$ )

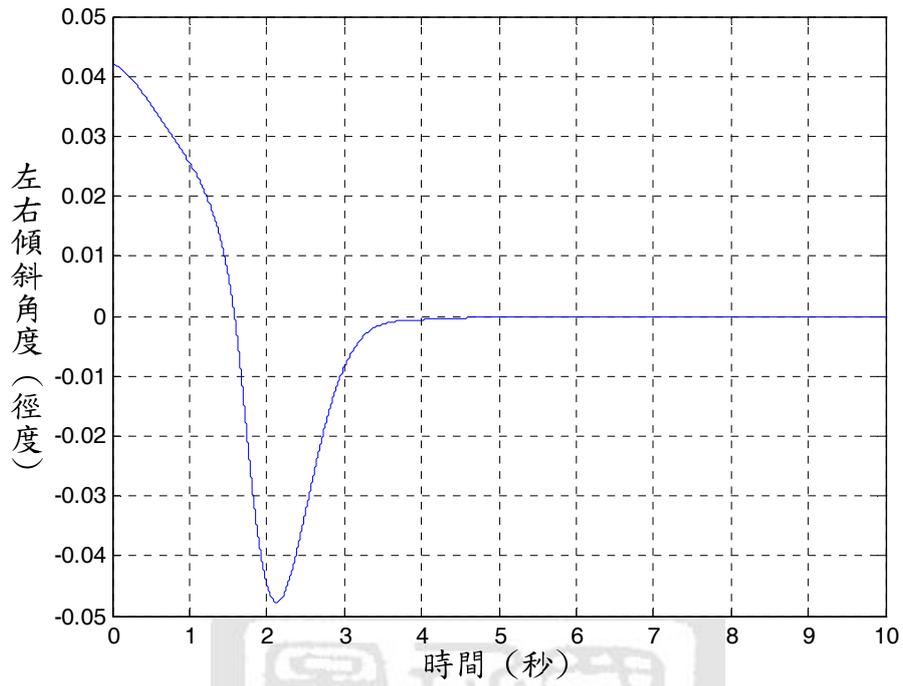


圖 5-37 回授線性化之單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.042$ )

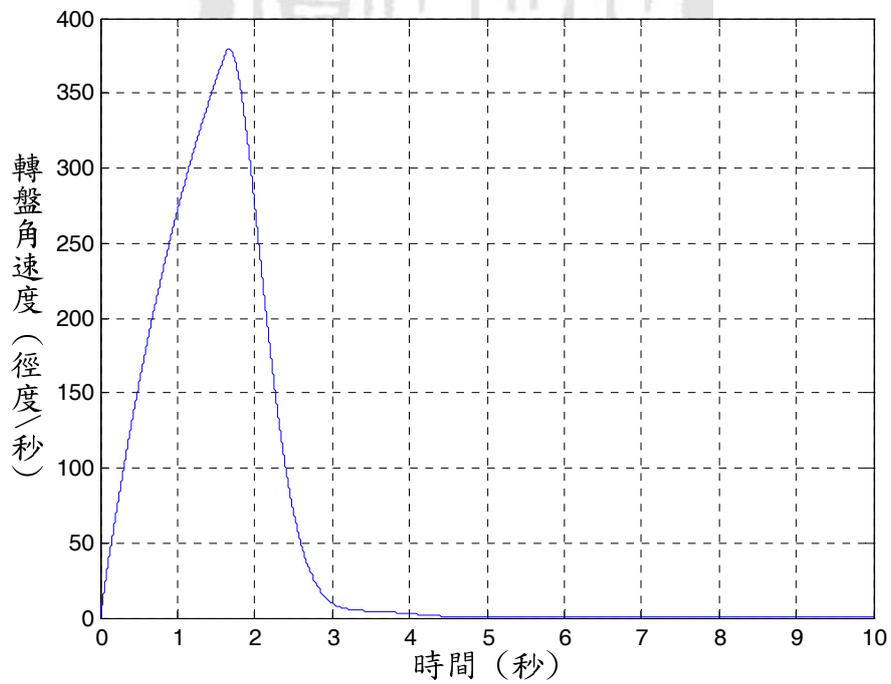


圖 5-38 回授線性化之轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.042$ )

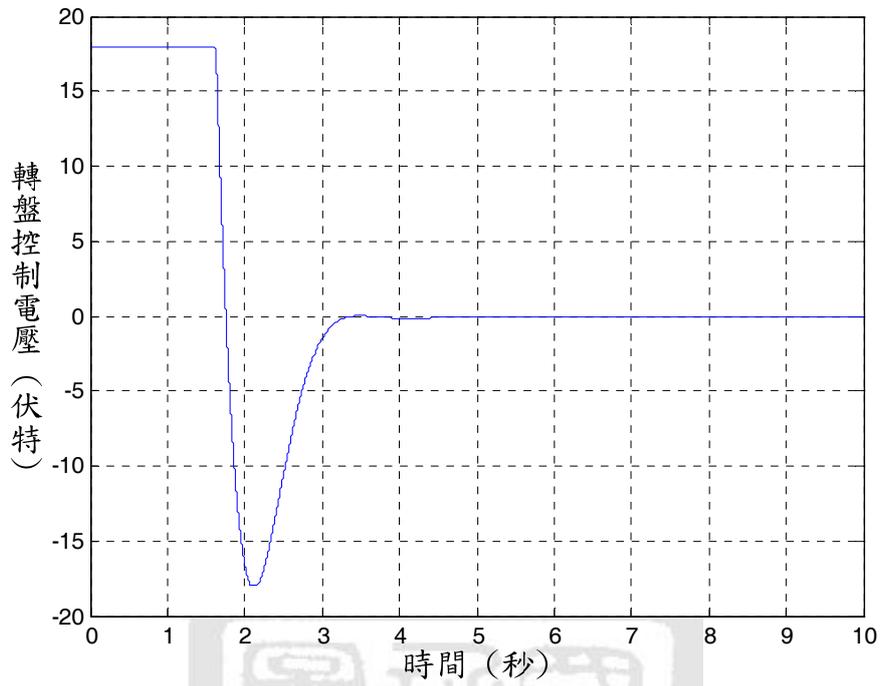


圖 5-39 回授線性化之轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.042$ )

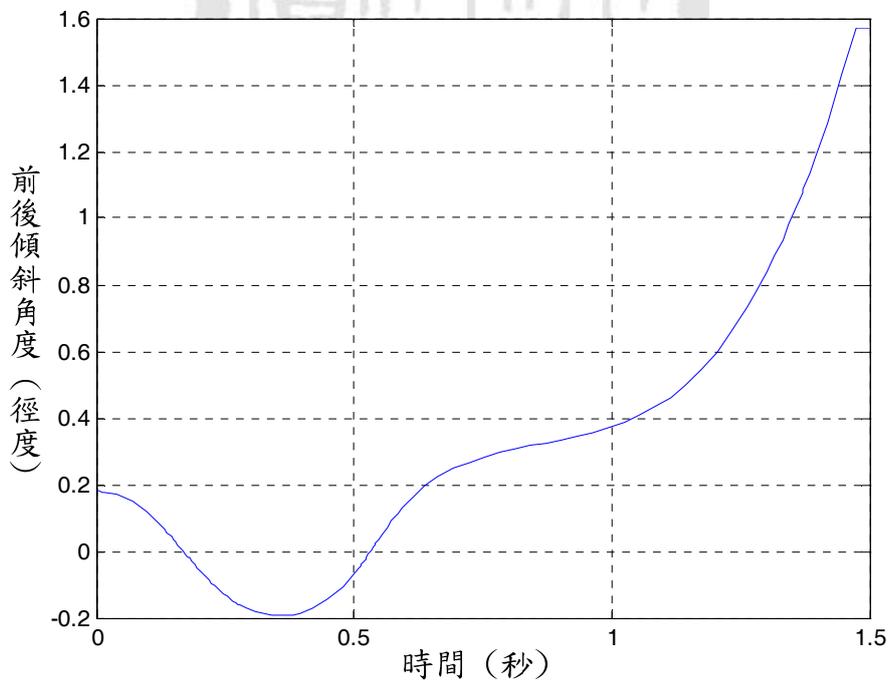


圖 5-40 LQR 控制器之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.18, \beta(0)=0$ )

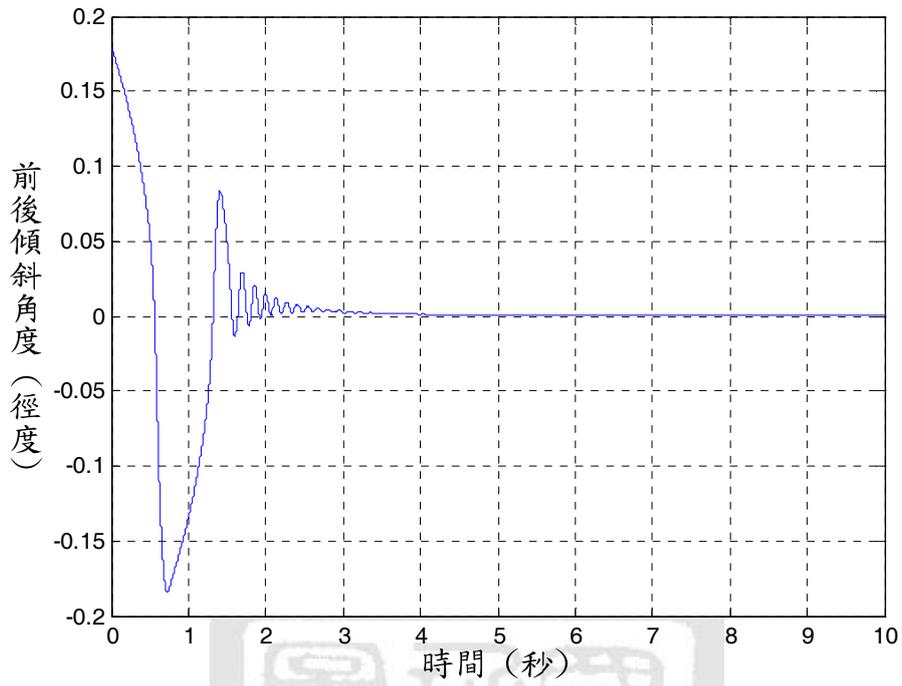


圖 5-41 順滑模態之單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.18, \beta(0)=0$ )

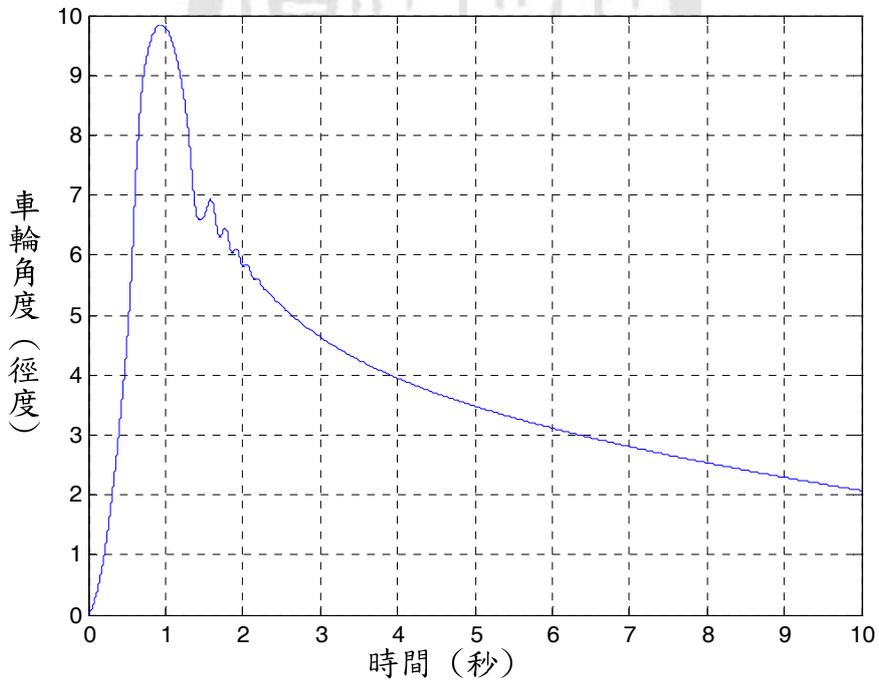


圖 5-42 順滑模態之車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.18, \beta(0)=0$ )

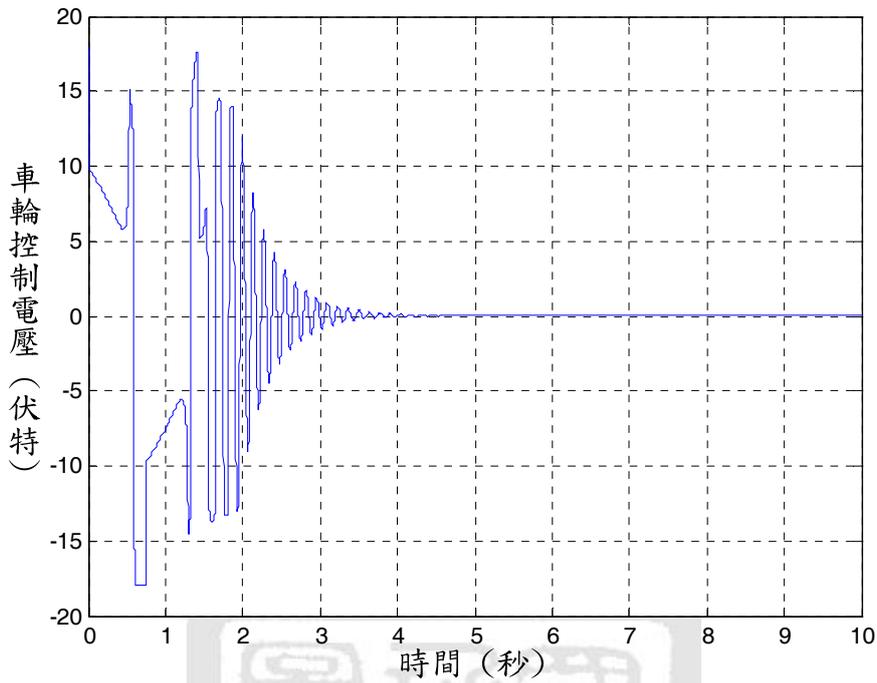


圖 5-43 順滑模態之車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.18, \beta(0)=0$ )

接下來吾人將以全狀態回授線性化控制器控制單輪車之左右平衡，以順滑模態控制器控制單輪車之前後平衡，整體單輪車控制方塊如圖 5-44 所示。

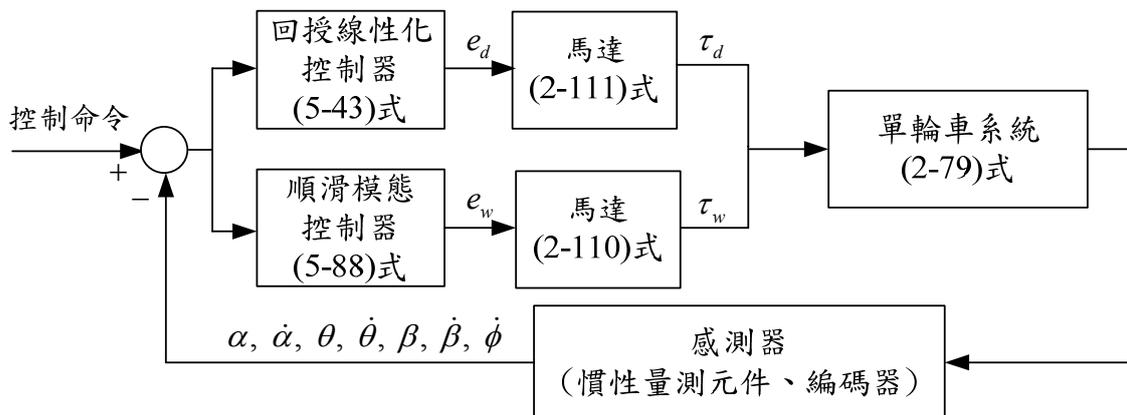


圖 5-44 單輪車系統控制方塊圖

吾人已知，單輪車系統在初始狀態  $[\alpha \ \theta \ \dot{\alpha} \ \dot{\theta} \ \beta \ \dot{\beta} \ \dot{\phi}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.043 \ 0 \ 0]^T$  下，全狀態回授線性化控制器已發散，如圖 5-45 所示。吾人再設定初始狀態為  $[\alpha \ \theta \ \dot{\alpha} \ \dot{\theta} \ \beta \ \dot{\beta} \ \dot{\phi}]^T = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.043 \ 0 \ 0]^T$  加以模擬。由圖 5-46 單輪車系統前後傾角響應圖及圖 5-49 單輪車系統左右傾角響應圖可發現，原本發散的左右平衡方向，在有前傾角度的狀態下，卻可以平衡，車輪角度響應圖如圖 5-47，轉盤角速度響應圖如圖 5-50 而其控制電壓響應圖分別如圖 5-48 及圖 5-51，偏向角模擬響應如圖 5-52。故吾人發現當單輪車系統前後移動時，將有助於左右方向的平衡，此動態也與實際系統物理現象相符，由此也可再次驗證第二章所推導之單輪車系統數學模型的正確性。

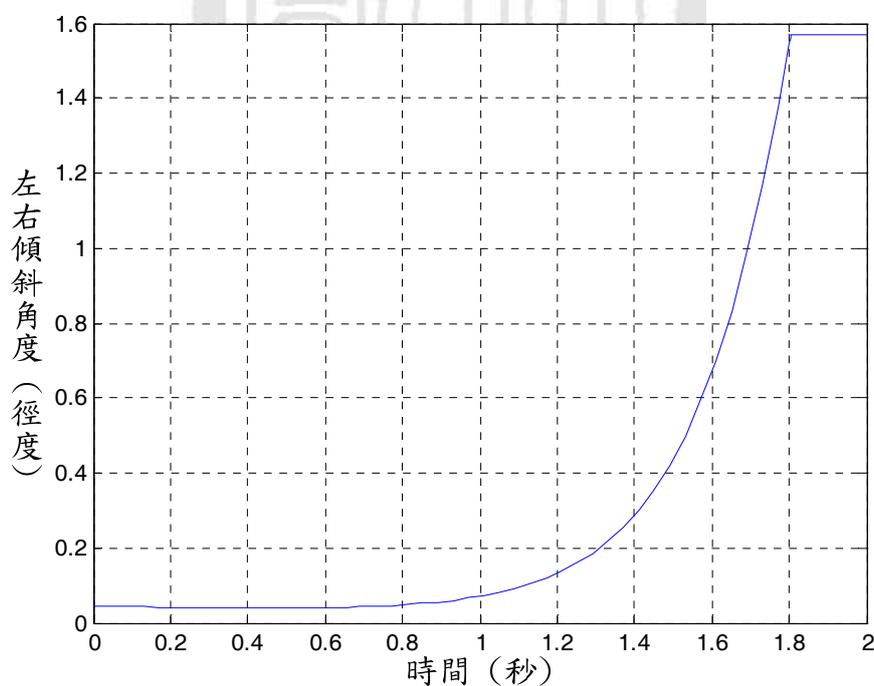


圖 5-45 單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0, \beta(0)=0.043$ )

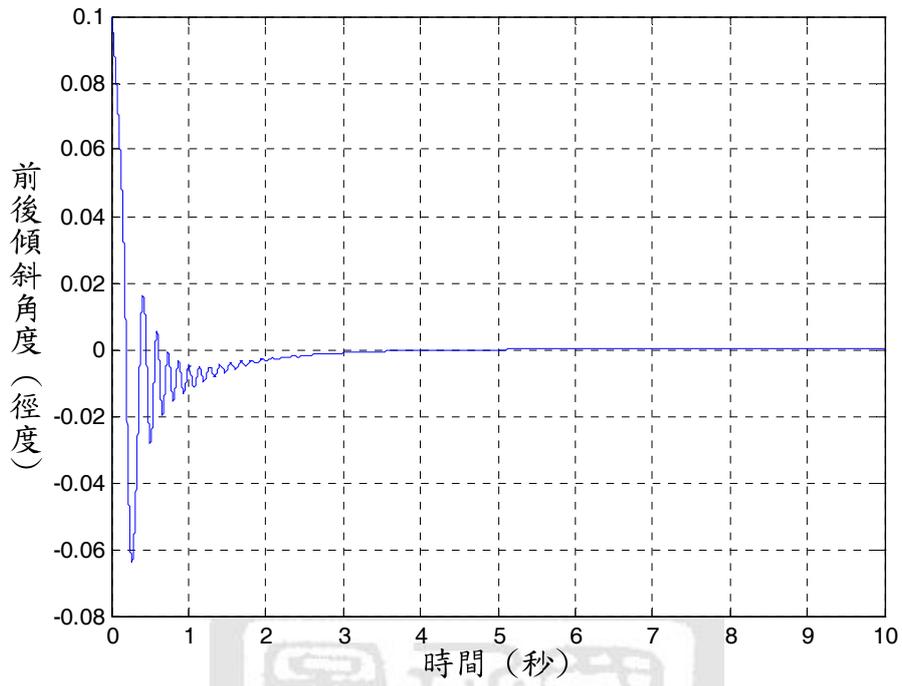


圖 5-46 單輪車前後傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ )

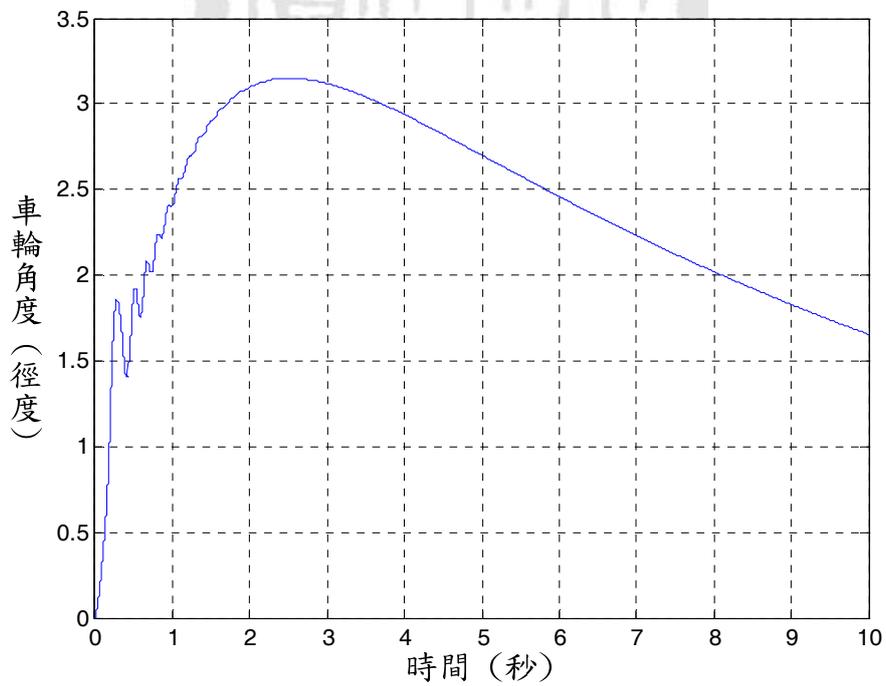


圖 5-47 車輪角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ )

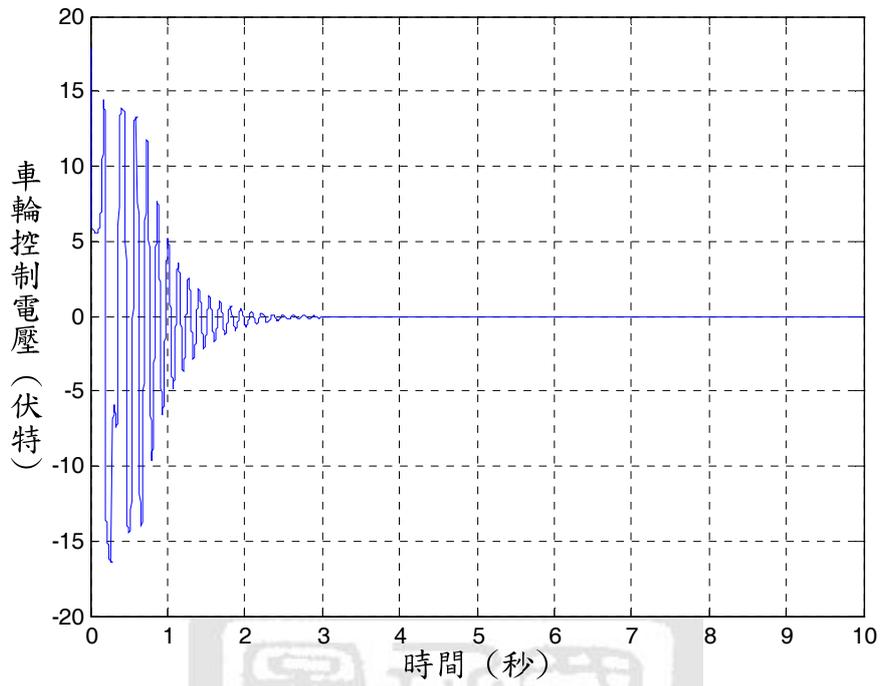


圖 5-48 車輪控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ )

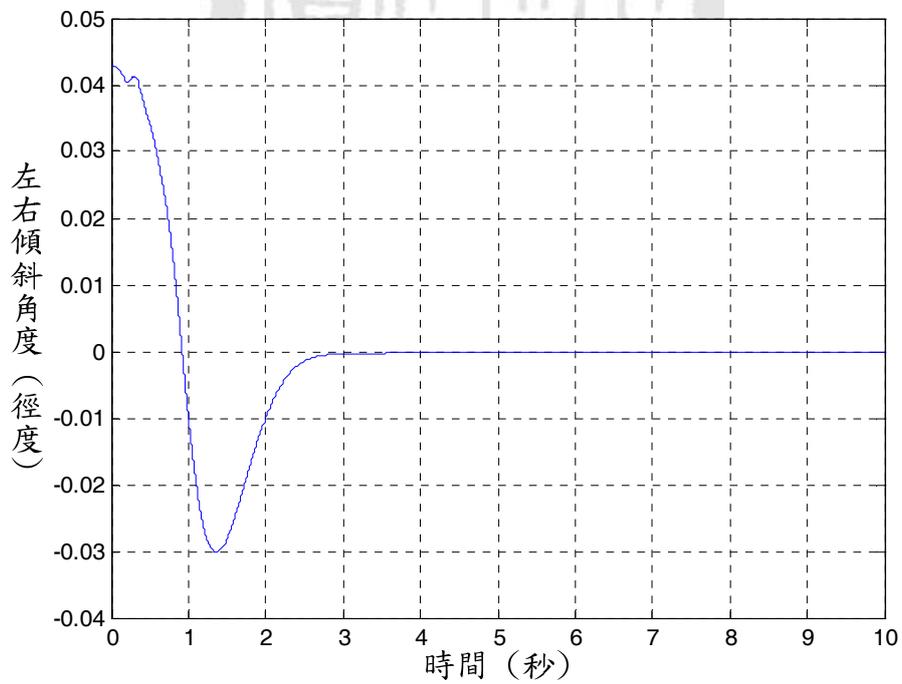


圖 5-49 單輪車左右傾角模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ )

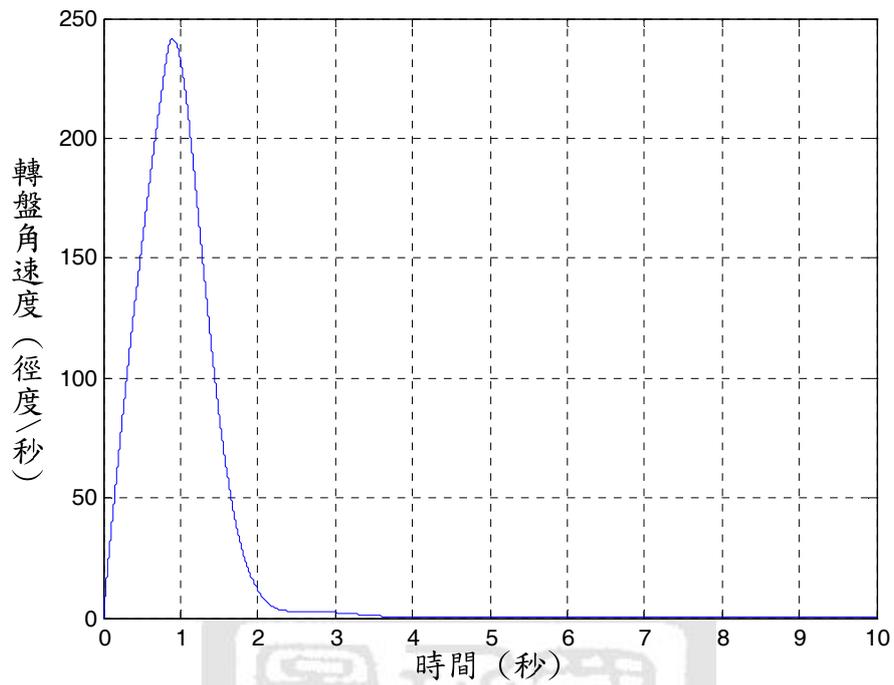


圖 5-50 轉盤角速度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ )

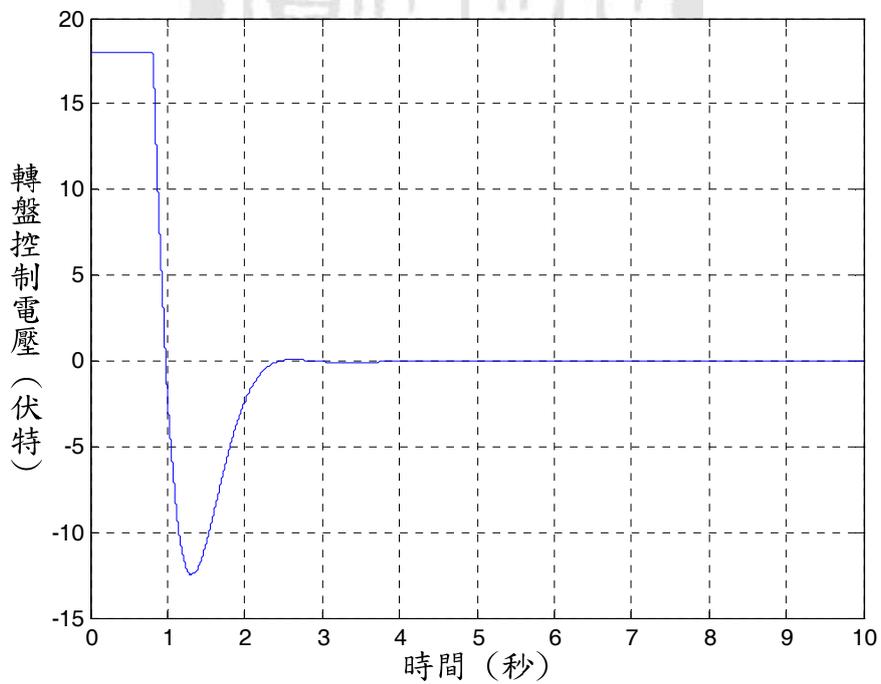


圖 5-51 轉盤控制電壓模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ )

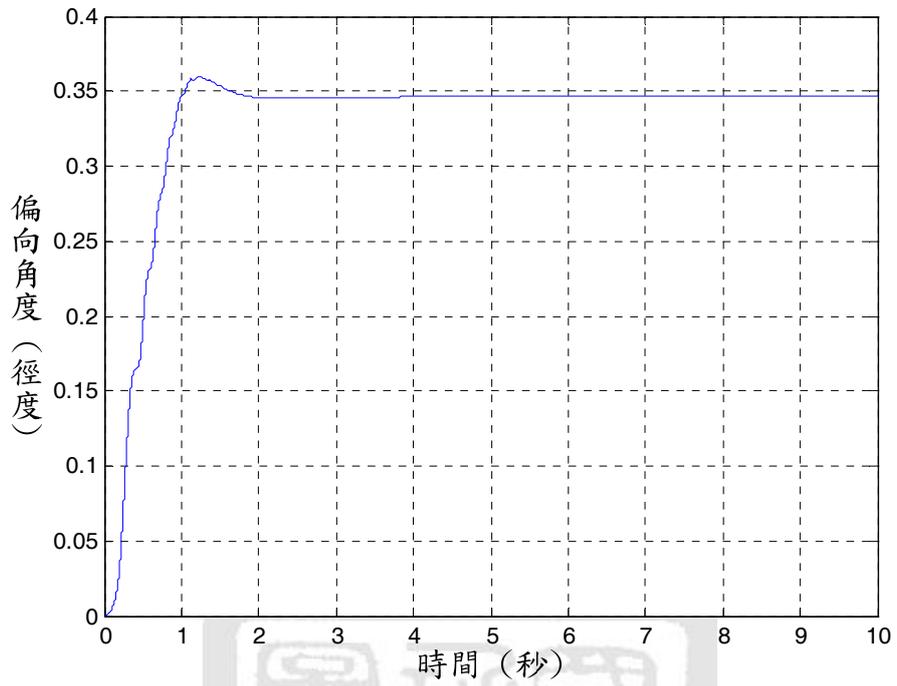


圖 5-52 單輪車系統之偏向角度模擬響應圖 ( $\alpha(0)=0.1, \beta(0)=0.043$ )

## 第六章 單輪車系統機構設計與製作

### 6-1 前言

單輪車系統機構主要由控制左右姿態的上盤、控制前後姿態的車輪機構與車體平台所組成，完整機構示意圖如圖 6-1 所示。左右姿態控制機構主要由馬達與轉盤組成，目的以轉盤轉動所產生之慣性力驅使系統左右擺動而不倒下。前後姿態控制機構主要由馬達經皮帶組與車輪連接組成，目的為由馬達經皮帶驅動車輪以達到車體前後平衡。車體平台由鋁製平板組成，目的為放置電路板、感測器以及電池等。本章將討論如何設計及建構系統之機構並介紹相關的角度感測器，內容為：6-2 節為單輪車系統機構設計與製作；6-3 節為單輪車系統之馬達轉動感測器。

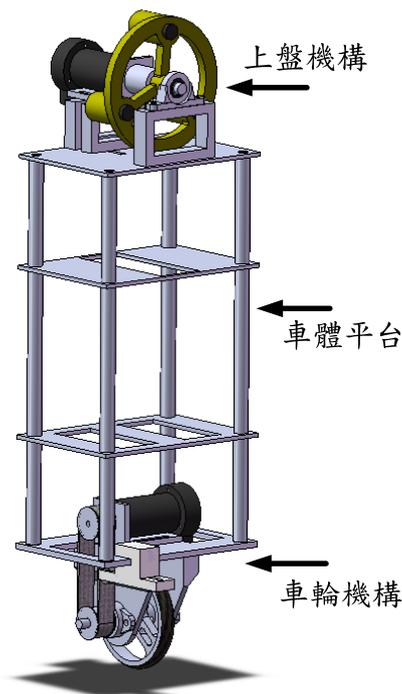


圖 6-1 單輪車機構示意圖

## 6-2 單輪車系統機構設計與製作

在控制系統中，一個系統之穩定度與效能優良與否，除了控制器的設計外，機構的設計與組裝也是相當重要的因素。良好的設計與精準的設置及校正，將可大大減少系統運作時所產生的震動與提升系統運作順暢度，進而使系統具有優越之性能。以下將依序介紹單輪車系統中所包含之轉盤機構、車身以及車輪之固定與傳動機制，與其他零件之設計及規格。

### (1) 轉盤與軸心：

本系統之轉盤採用黃銅為材料，因為轉盤的轉動慣量與質量、半徑有關，為了讓系統有較高之轉動慣量，採用密度較高且易於加工之黃銅材質。製作上先以車床車出外型後，為了減輕重量但不嚴重降低轉動慣量的條件下，採用將重量平均集中於轉盤邊緣的方式，所以再經過 CNC (Computer Numerical Control) 電腦銑床進行轉盤摺空作業及可拆式加重圓柱的安裝孔洞加工，可拆式加重圓柱用來增加集中於轉盤邊緣的重量，以提升轉動慣量。而在轉盤與軸心連結固定部份，因為轉盤重量及轉盤與軸心之間不適合以螺絲固定，又為了提升軸心與轉盤之間運轉時的咬合度，故本系統在軸心連結上採用卡榫的結構，如圖 6-2 所示，製作上先以線割機於轉盤軸心安置處切割出一長方形凹槽，而在軸心的部份也以銑床銑出一長型凹槽，最後再由一塊金屬鋼塊卡住軸心與轉盤。組裝後如圖 6-3 所示。最後配合繞性聯軸器以及連坐軸承頂住轉盤加以固定。

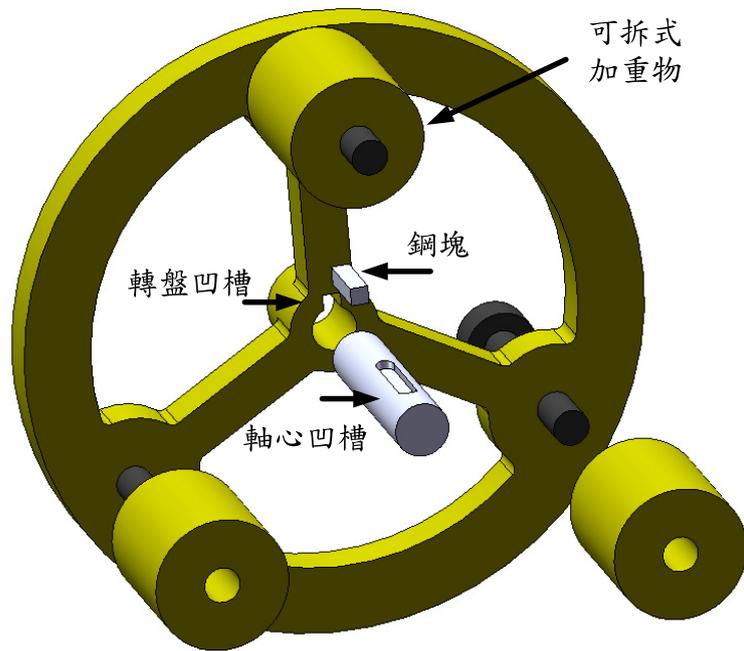


圖 6-2 轉盤與軸心卡榫結構示意圖

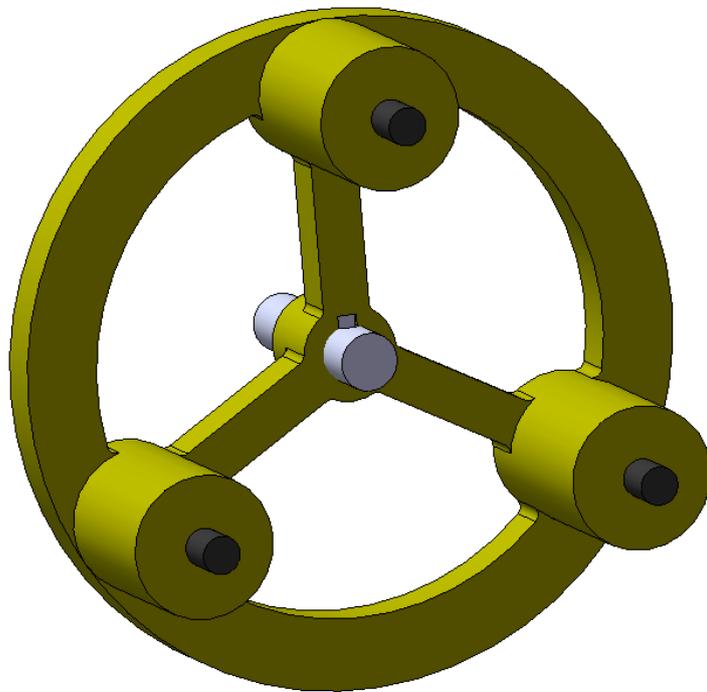


圖 6-3 轉盤與軸心結合示意圖

## (2) 上轉盤機構固定機制

在本論文中，為了盡量將重心集中於車體的中心軸線上，故將轉盤擺放於車體的正上方，所以在裝置上必須將轉盤與馬達架高，以防止轉盤與車體鋁板碰撞。在馬達固定上，先以一 L 型板固定馬達，再以兩塊鋁塊加以墊高，為了減輕機構重量，吾人將鋁塊挖成中空狀，另外 L 型板上有兩溝槽，目的為調整馬達前後位置之用。轉盤部分也用了一塊中空鋁塊墊上一組連坐軸承(圖 6-4)架高，連結轉盤的軸心一端以連座軸承支撐，另一端軸心則透過繞性聯軸器(圖 6-5)與馬達相連接，如圖 6-6 所示。



圖 6-4 連坐軸承



圖 6-5 繞性聯軸器

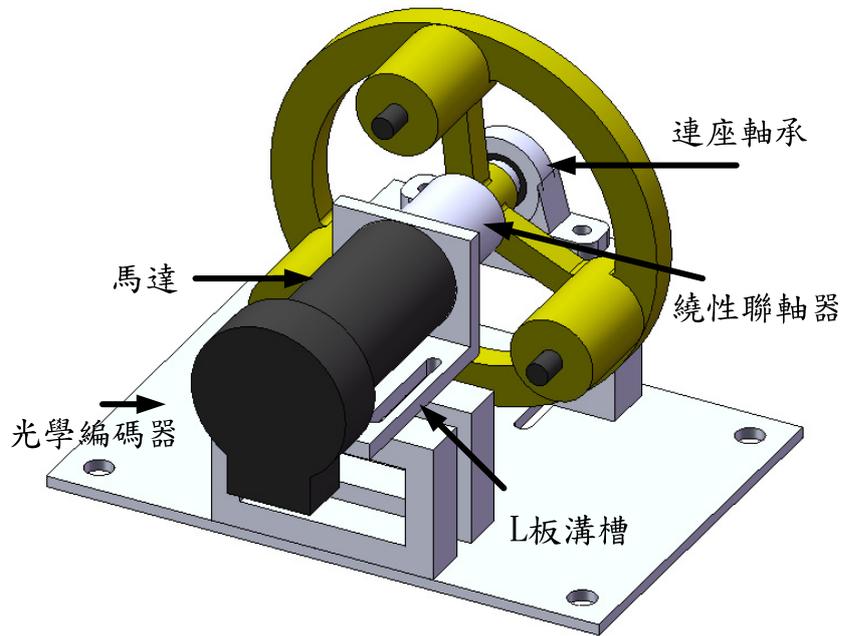


圖 6-6 上盤機構示意圖

### (3) 車輪

本論文實作中，製作了兩個車輪，因為在實作過程發現，雖然原本的车輪如圖 6-7 所示，可以達成平衡之目的，但由於輪寬過窄，造成系統平衡條件相當嚴苛，以至於帶動轉盤之馬達需高速運轉而導致馬達溫度相當的高，故吾人重新製作一個寬度較寬大的車輪以減低馬達負擔。論文中所使用之車輪均以鋁材所製，因為鋁材具有相當程度之鋼性且密度較低，製作上先以車床將外型完成，為了減輕重量以及顧及重量之平均，再以 CNC 電腦銑床銑出減輕重量之凹槽，最後在外圈裹上一層橡膠以增加輪子與地面之摩差力。另外在寬度較大的車輪部份，吾人將其邊緣以車床修成弧形，用以適量增加系統平衡之困難度，以及增加車體側向傾倒時車輪接觸地表之面積，如圖 6-8 所示。

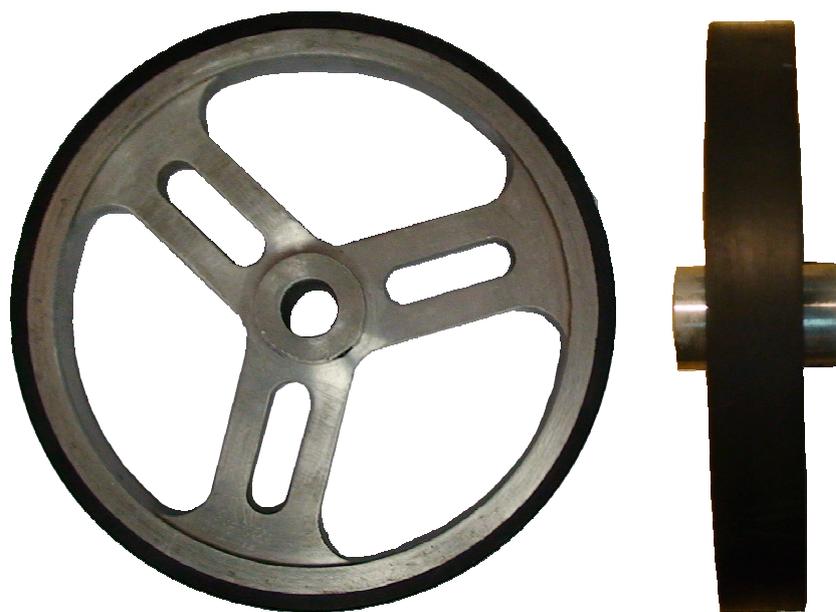


圖 6-7 窄車輪實體圖



圖 6-8 寬車輪實體圖

#### (4) 底盤與車輪機構固定機制

底盤的部份，主要由一片鋁板以及兩片側板所組成，目的在於用以固定馬達及車輪。底盤的組裝採用打鉚釘的方式，如圖 6-9 所示，將兩

側板固定於鋁板上，此組裝方式具有相當好的剛性強度，也具可拆的便利性。在馬達的固定上，先將馬達固定於L型板上，再與底盤結合，固定馬達的L型板上有兩溝槽，目的為調整馬達在底盤上之位置。車輪在底盤的安裝方式為先由兩組壁眼軸承(圖 6-10)固定於底盤側板上，接著將軸心透過兩組壁眼軸承與車輪連接並固定。

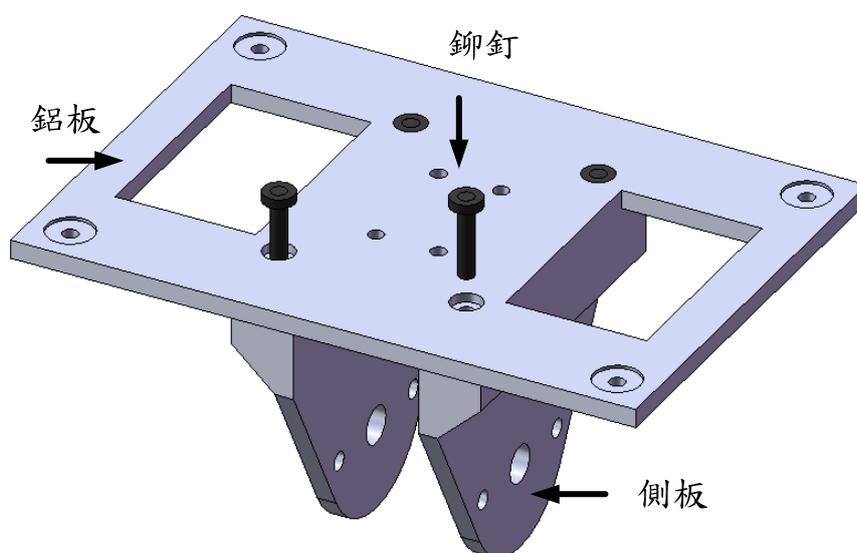


圖 6-9 底盤組裝示意圖

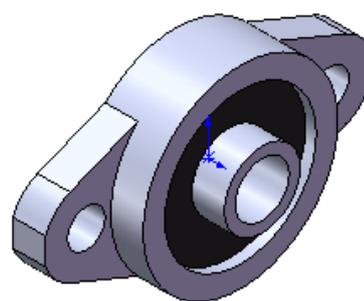


圖 6-10 壁眼軸承

#### (5) 車輪傳動機制

本論文帶動車輪的馬達放置於車輪正上方，目的是為了將重心盡量

維持在車體中心軸線上，所以車輪與馬達的軸心並非直接連接，而是以時規皮帶與皮帶輪組連結傳動。皮帶輪組齒輪比採用 1:1，時規皮帶型號為 118XL，組裝時必須注意皮帶之鬆緊度，過鬆時，皮帶會有振動現象，且無法精準的傳動。過緊時，除了傳動過程需要更多的力量才得以驅動皮帶輪外，皮帶還有斷裂之虞，故安裝上適時地調整機構高度並配合惰輪的使用，才能調整出適當的皮帶鬆緊度。圖 6-11 為本論文使用之時規皮帶輪組。



圖 6-11 時規皮帶與皮帶輪組

#### (6) 惰輪機構

本系統因為在車輪傳動上採用皮帶傳動，故在車輪傳動系統上，吾人加裝了一組惰輪，目的在於調整皮帶鬆緊度以及增加皮帶與皮帶輪之間的咬合度，並可降低傳動時的震動。惰輪為了兼顧剛性以及重量，吾人採用壓克力與鋁材，並搭配上軸承所構成。如圖 6-12 所示。



圖 6-12 惰輪實際機構

#### (7) 車身平台

單輪車的車身部分，採用鋁板加上鋁柱所構成，主要用來放置電路板、感測器以及電池等裝置。在鋁柱的設計上，吾人將鋁柱中心全部貫穿挖空，並設計有卡榫的結構，如圖 6-13 所示，讓車身組裝上更加穩固。車身組裝部份，採用層層相疊的方式組合，最後再用螺絲條貫穿鋁柱並以螺帽鎖緊。此方式的剛性強度高，且具有調整車身高度之優點。鋁柱實體如圖 6-14 所示。

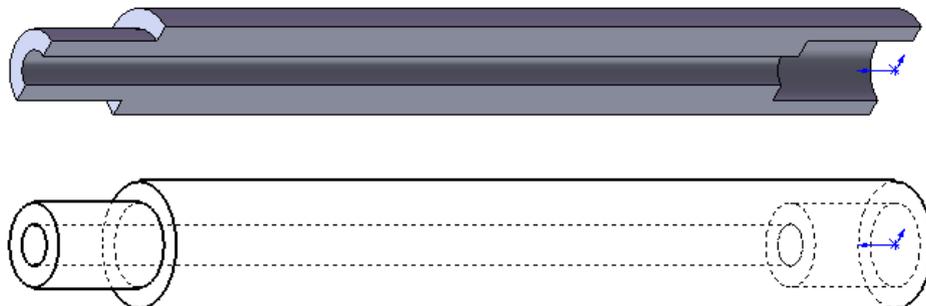


圖 6-13 鋁柱結構

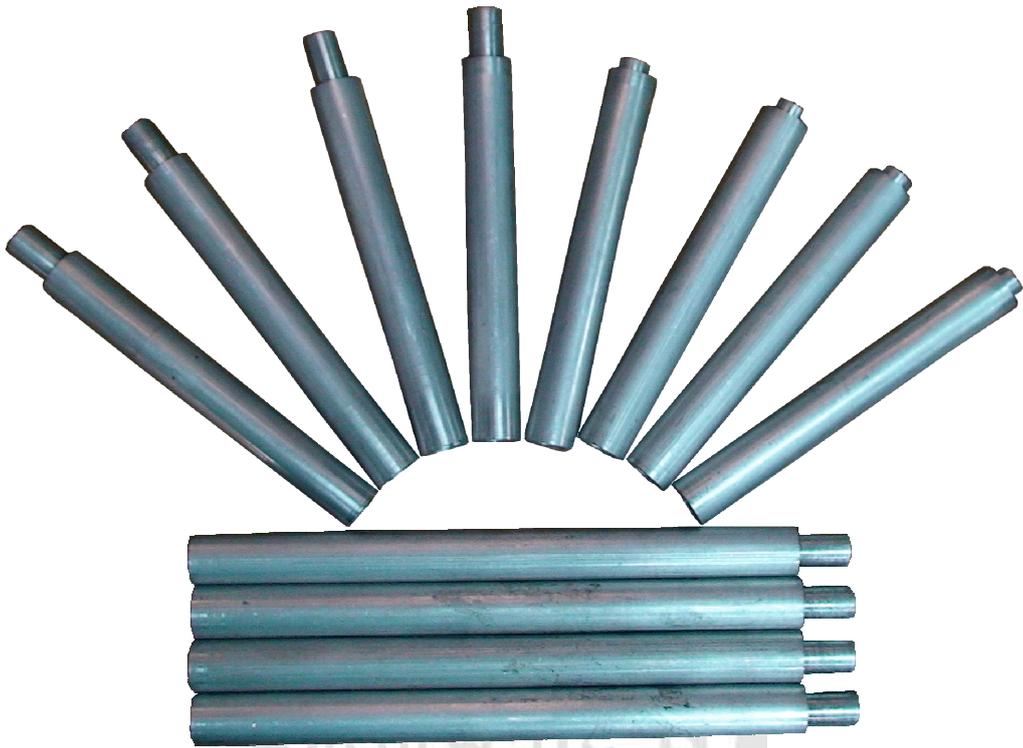


圖 6-14 鋁柱實體圖

(8) 馬達

本論文所採用的兩顆馬達，均為 Maxon 公司所出產之永磁式直流馬達，額定輸入電壓為 24 V，額定功率為 150 W。其實際外觀如圖 6-15 所示



圖 6-15 馬達

### (9) 保護裝置

單輪車機構上，為了防止運作中發生任何不可預期之意外，吾人在底盤處加上了限制傾倒角度的安全裝置，此裝置為可調式，可以隨時調整限制角度，而為了不增加系統平衡控制上的負擔，吾人採用壓克力搭配鋁材以減低保護裝置的重量，但又兼顧所需之剛性強度，實體機構如圖 6-16 所示。

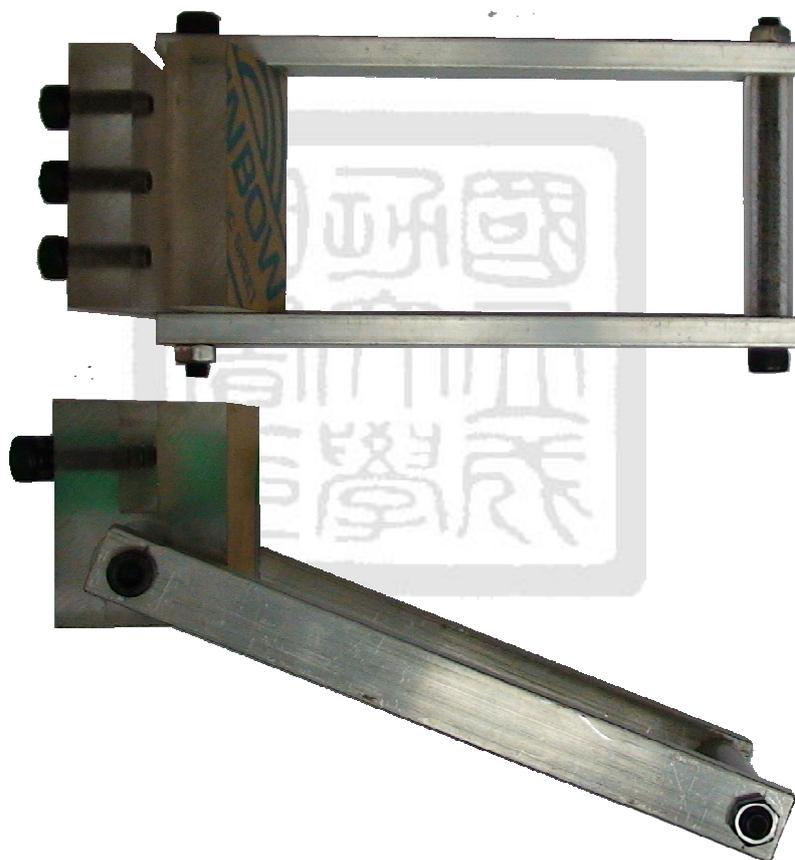


圖 6-16 保護裝置實體圖

將各零組件加以安裝後，上半部機構組裝實體如圖 6-17 所示，底部機構組裝實體如圖 6-18 所示，整體實體機構如圖 6-19 所示，整體實體機構正視圖如圖 6-20 所示，整體實體機構側視圖如圖 6-21 所示。

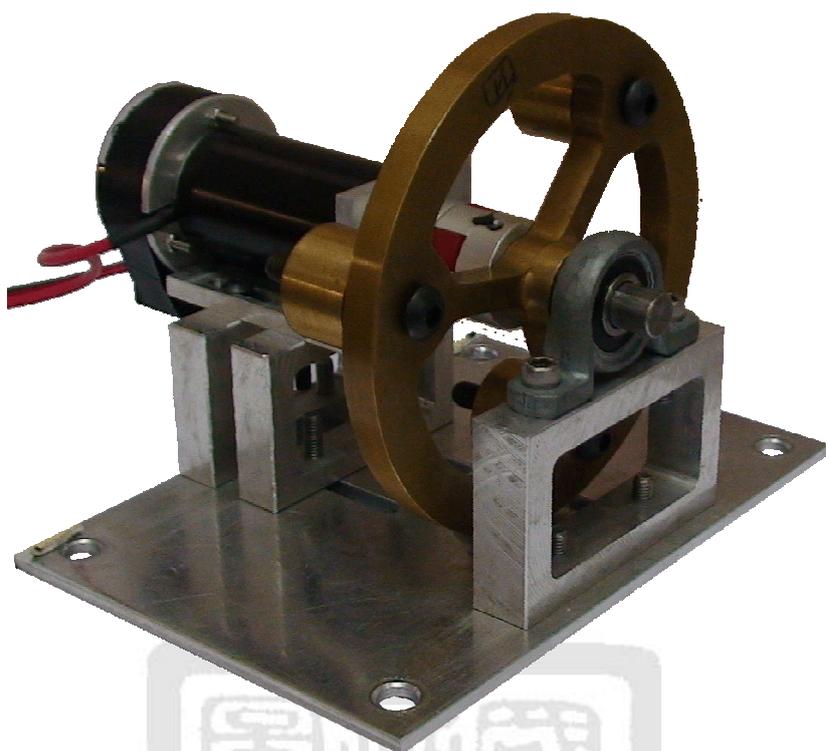


圖 6-17 單輪車上半部實體機構圖

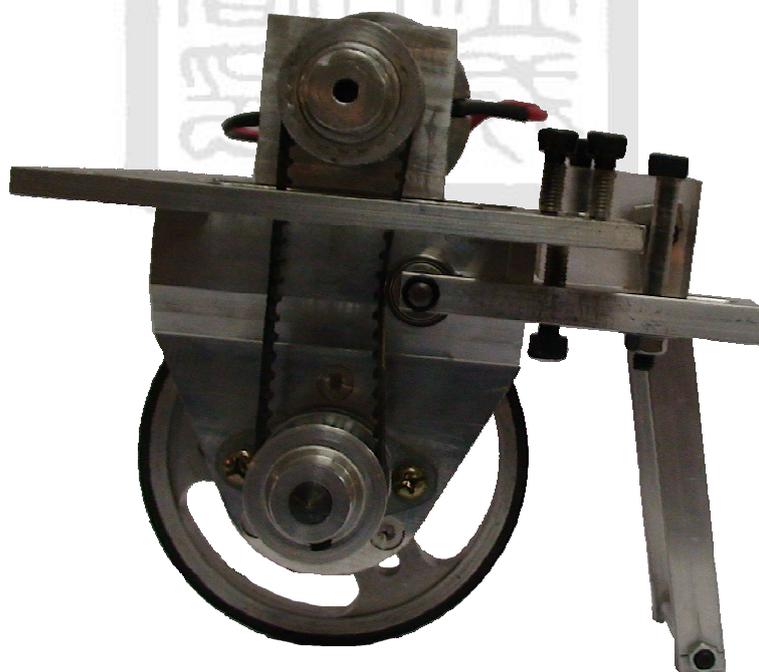


圖 6-18 單輪車底部實體機構圖



圖 6-19 單輪車實體機構圖



圖 6-20 單輪車實體機構正視圖



圖 6-21 單輪車實體機構側視圖

### 6-3 馬達角度感測器

本論文所採用的馬達角度感測器為企誠公司生產型號為 HS56A 之增量型光學編碼器，解析度為 2000 ppr (pulse per revolution)，輸入 5 V，輸出有 A、B、Z 相，其內部結構如圖 6-22 所示，主要由光學盤(optical disk)與光遮斷器(photo interrupters)以及塑膠外殼組成。

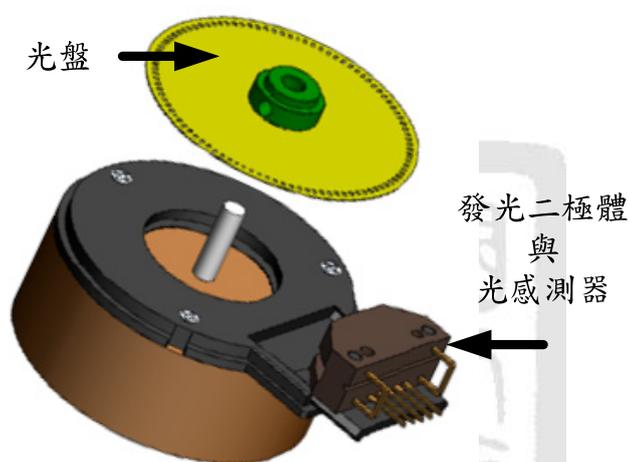


圖 6-22 光學編碼器內部結構[33]

光學編碼器依輸出訊號可分為數位式及類比式，其中數位式又可分為增量型和絕對型，本論文採用增量型。數位光學式編碼器原理是以一個有細縫的圓盤連接馬達的旋轉軸，並且置於相對發光二極體和光感測器之間，隨著軸心旋轉，當光源照到圓盤空隙時為透光，非空隙的位置則為不透光，光感測器將透光的有無轉換成相位相差 90 度的脈波訊號，由此脈波訊號即可得到馬達轉動角度與方向，圖 6-23 為光學編碼器之輸出示意圖，當順時針旋轉時 A 相超前 B 相 90 度，而逆時針旋轉時 B 相超前 A 相 90 度，並利用光學式編碼器的介面電路可讀取光學式編碼器

所送出之 A 相及 B 相的脈波，進行脈波的計數與旋轉方向之辨識。其計數方式是可在任何點設立原點，然後再以數位的方式表示從該原點算起之位移或角度之變化量。而 Z 相可稱為標記指數(index)，用來決定編碼器的絕對零準位(zero)。

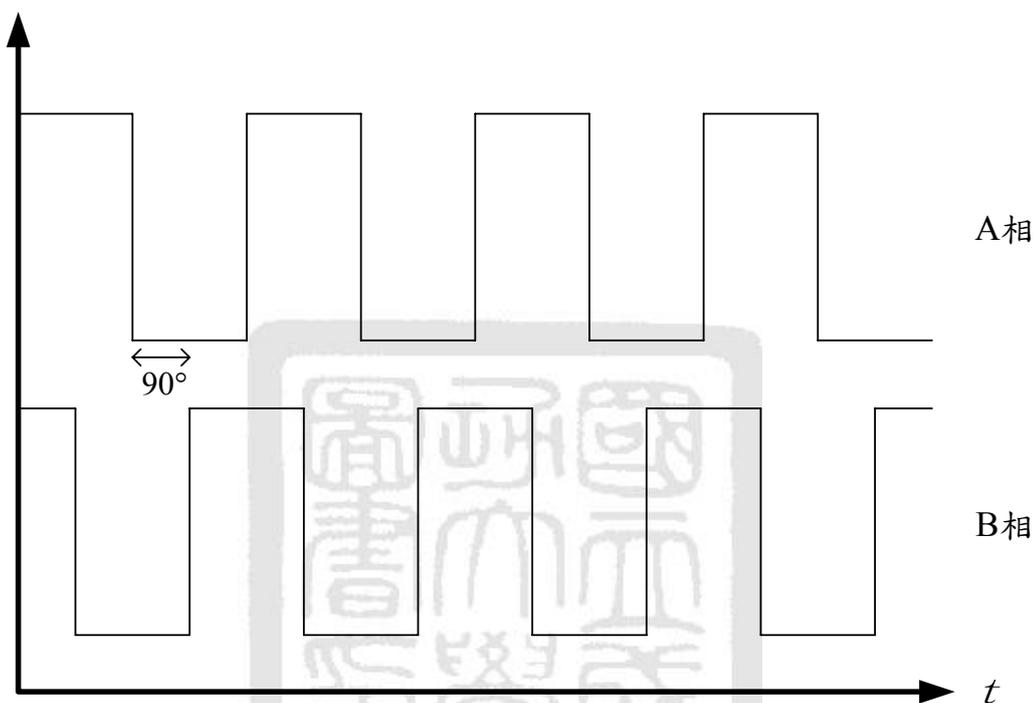


圖 6-23 光學編碼器之輸出示意圖

## 第七章 外部硬體電路介紹

### 7-1 前言

單輪車系統所使用的周邊電路，如 PWM 馬達驅動電路、電源管理電路、類比數位轉換電路、姿態感測器等，將於本章詳細介紹，除此之外也將介紹本論文中計算控制法則的數位信號處理器核心晶片 TMS320F2812 (以下將簡稱為 DSP2812)與其內部模組。主要內容有：7-2 節周邊硬體電路與規格；7-3 節系統核心晶片介紹。

### 7-2 周邊硬體電路與規格

本章節將詳細介紹單輪車系統所使用之週邊硬體電路與規格，包括電源管理、類比轉數位、PWM 馬達驅動以及姿態感測電路。

#### 7-2-1 電源管理與類比數位轉換電路

機電系統若要是能正常動作，必須要有充足及特定的電力來源，本論文實作的單輪車系統因為需要相當多不同電壓之電源，故以電池以及電源供應器搭配穩壓電路以得到系統所需之各種電壓源。本系統所需之電壓源由表 7-1 表示。

表 7-1 單輪車系統電壓源

電壓值	系統需求
18 V	馬達驅動電源

12 V	類比多工器電源
5 V	DSP2812 電源、陀螺儀 AXRS300 電源
3.3 V	陀螺儀 IDG-300 電源、加速規電源
2.5 V	陀螺儀 AXRS300 參考電壓
1.23 V	陀螺儀 IDG-300 參考電壓

穩壓電路則由 LM1084、LM2576、L7812CV、PQ3RD23、LM317 所組成。LM1084 配合周邊電路即可藉由調整可變電阻的阻值改變輸出電壓，其最大耐流為 5 A，在此系統調整為 5 V 輸出，應用電路如圖 7-1 所示。

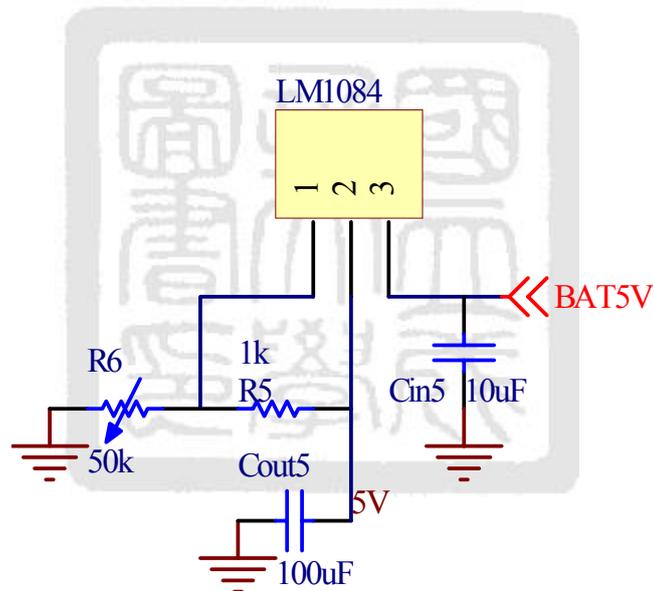


圖 7-1 穩壓電路 LM1084 應用電路圖片

L7812CV 為輸出固定電壓 12 V，最大輸出電流 1.5 A，PQ3RD23 為輸出固定電壓 3.3 V，最大輸出電流為 2 A，兩者應用上只需在輸出輸入端接上穩壓電容即可。LM2576 配合周邊電路即可藉由調整可變電阻的阻值改變輸出電壓，在本論文系統中調整為 1.23 V 輸出，其最大耐流為 3 A，其系統應用電路圖如圖 7-2 所示。

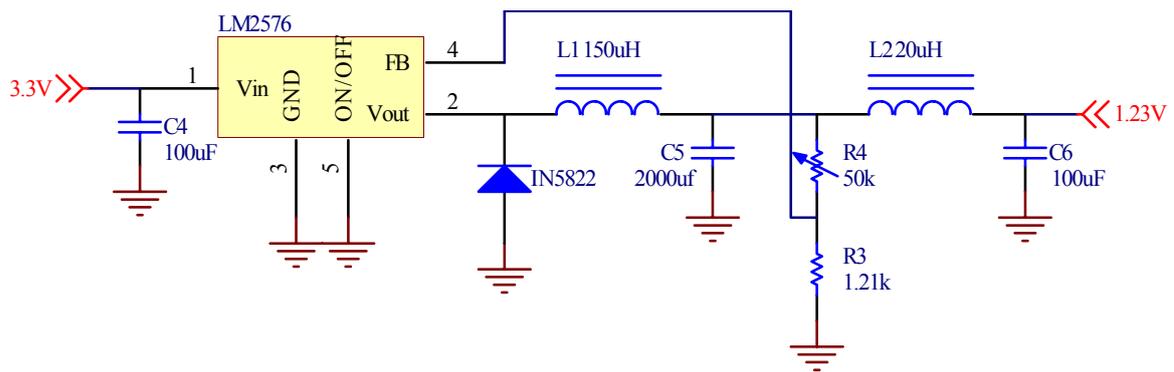


圖 7-2 穩壓電路 LM2576 應用電路圖

LM317 配合周邊電路即可藉由調整可變電阻的阻值改變輸出電壓，在本論文系統中調整為 2.5 V 輸出，其最大耐流為 1.5 A。其應用電路與 LM1084 相似，系統實際電路如圖 7-3 所示。

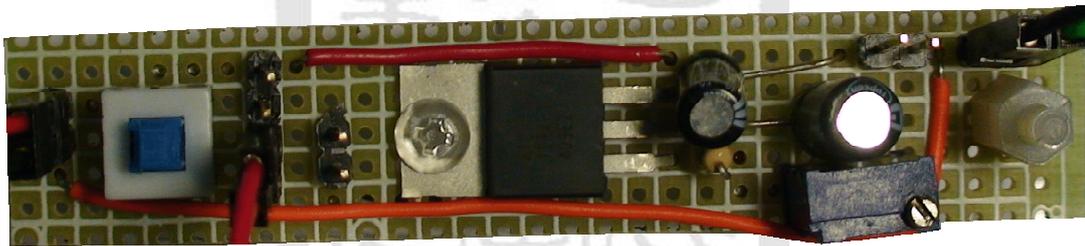


圖 7-3 穩壓電路 LM317 實際電路圖

因為單輪車系統上之感測器為類比訊號輸出，而 DSP2812 為數位訊號處理器，故在系統應用上必須有類比轉數位的電路。本論文所使用之類比轉數位電路採用德州儀器公司所生產之 12 位元 A/D 轉換晶片 ADS774 搭配 ANALOG DEVICE 公司所生產之 16 通道類比多工器 (analog multiplexer) ADG506A。ADS774 為單通道之類比轉數位晶片，可設定四種工作模式為：單極性 0 V~10 V、0 V~20 V 或雙極性 -5 V~5 V、-10 V~10 V。本論文因為系統之類比訊號範圍為 0 V~5 V，故為了提升

其解析度，採用雙極性-5 V~5 V 的模式。其實際系統應用電路圖如圖 7-4 所示。

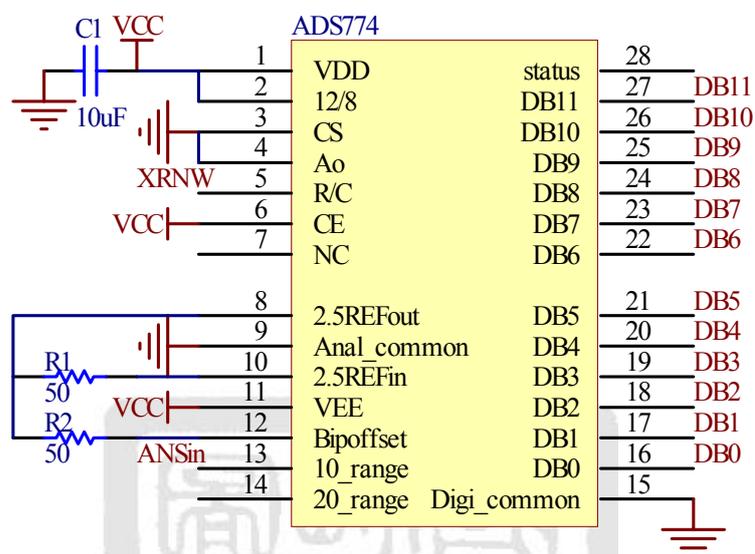


圖 7-4 類比轉數位晶片應用電路

因為 ADS774 為單通道之類比轉數位晶片，但是在單輪車系統上，有多組類比訊號必須擷取，故在實際應用上搭配 ADG506A，16 通道類比多工器，以達到單一類比轉數位晶片擷取多組類比訊號之目的。

ADG506A 可分為兩個工作模式，單電源工作模式以及雙電源工作模式，單電源模式電源輸入範圍為 10.8 V~16.5 V，此工作模式下，輸入訊號最大電壓範圍為 0 V~16.5 V，而雙電源工作模式輸入電壓範圍為 10.8 V~16.5 V 以及-10.8 V~-16.5 V，在此工作模式下，輸入訊號的最大電壓範圍則為-16.5 V~16.5 V。本論文應用中，因為所有的類比訊號均為正電壓，而且為了電壓管理上之便利，採用單電源 12 V 工作模式，故訊號電壓輸入範圍為 0 V~12 V，其應用電路圖如圖 7-5 所示，通道切換真值表如圖 7-6 所示。

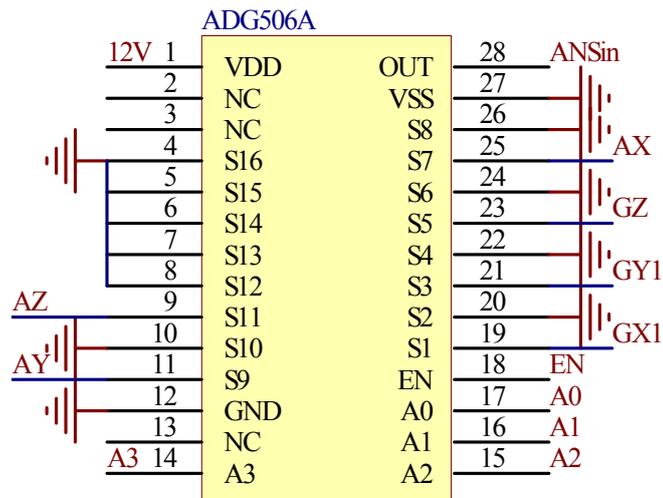


圖 7-5 類比多工器 ADG506A 應用電路圖

Truth Table (ADG506A)					
A3	A2	A1	A0	EN	On Switch
X	X	X	X	0	NONE
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	2
0	0	1	0	1	3
0	0	1	1	1	4
0	1	0	0	1	5
0	1	0	1	1	6
0	1	1	0	1	7
0	1	1	1	1	8
1	0	0	0	1	9
1	0	0	1	1	10
1	0	1	0	1	11
1	0	1	1	1	12
1	1	0	0	1	13
1	1	0	1	1	14
1	1	1	0	1	15
1	1	1	1	1	16

X = Don't Care

圖 7-6 類比多工器 ADG506A 真值表[34]

在系統上，電源管理以及類比轉數位電路為同一電路板，其電路實體圖如圖 7-7 所示。

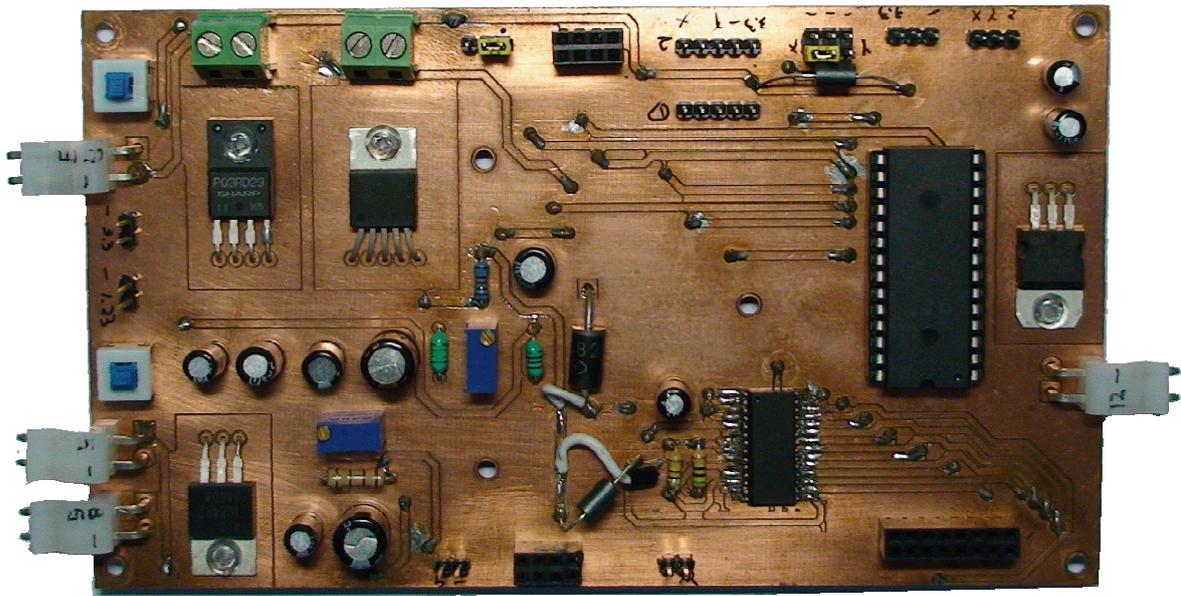


圖 7-7 電源管理與 A/D 轉換電路實體圖

### 7-2-2 PWM 馬達驅動電路

PWM 驅動方式具有功率傳輸效率高的優點，同時只需單電源供應即可達到雙電源驅動的效果。本論文所使用的 DSP2812 提供了 6 組共 12 個通道的 PWM 控制訊號，因此相當適合以 PWM 方式驅動直流馬達，由於 DSP2812 所輸出的訊號無法直接驅動直流馬達，因此 PWM 訊號由 DSP2812 輸出後，必須經過一些外部電路的配合，以擁有足夠的功率來驅動馬達，另一方面也提供使馬達正反轉的電路機制。

本論文之 PWM 馬達驅動電路採用 Allegro 公司出產的 A3941 全橋控制晶片以及 H-Bridge 電路組成。全橋控制晶片 A3941 為驅動外部 H-Bridge 電路之控制晶片，主要應用於高功率的有刷直流馬達，應用上需搭配 N 通道場效應電晶體組成的 H-Bridge 電路，它提供了許多的保護機制，防止馬達快速切換正反轉時，控制訊號電壓不足所造成之誤動作，



產之 N 通道場效應電晶體 IRF7842 所組成，其最大  $V_{DS}$  (drain to source voltage) 為 40 V，可承受最大瞬間電流為 140 A，在工作溫度 25°C 之下，可承受最大連續電流為 18 A，在工作溫度 70°C 左右，可承受最大連續電流為 14 A。本論文的實際應用上，為了確保驅動電路能夠承受系統所需之電流，故在此吾人將電晶體並聯後，再組成 H-Bridge 電路以增加驅動電路承受電流的程度，其電路圖如圖 7-9 所示。而隨著使用者需求的不同，此馬達驅動電路可以更改電晶體型號以求更大承受電流或電壓。系統實際電路板如圖 7-10 所示。

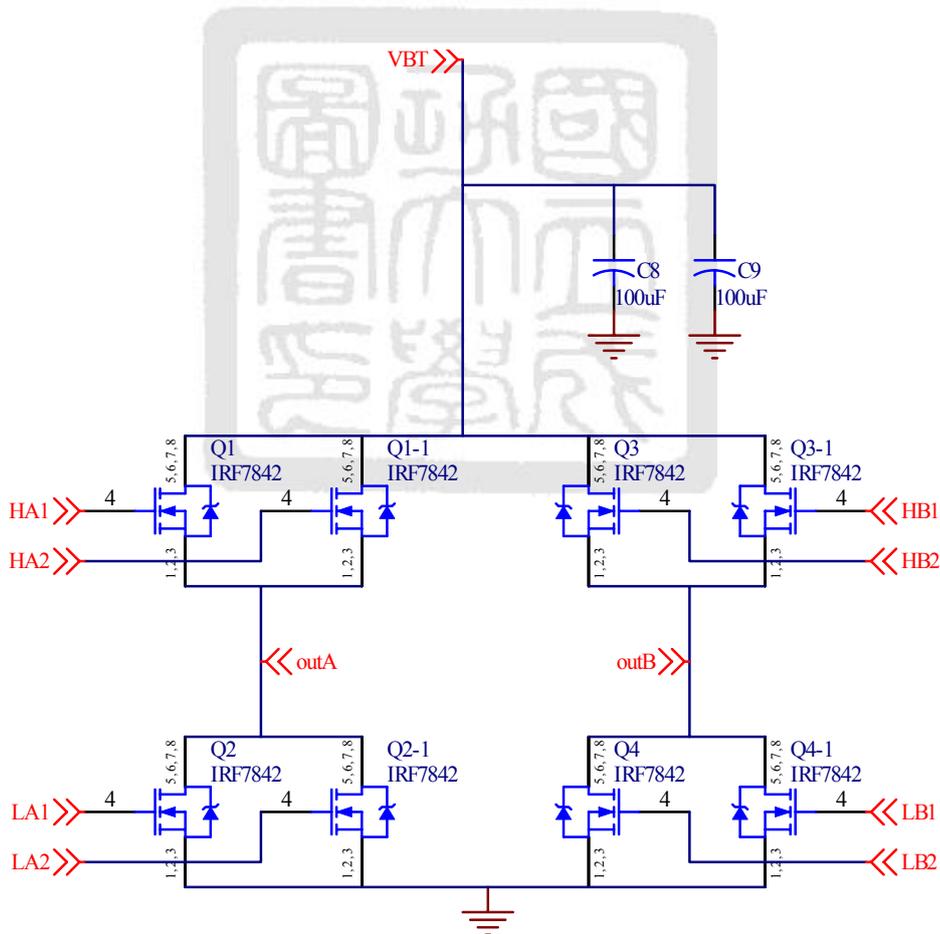


圖 7-9 馬達驅動 H-Bridge 電路圖

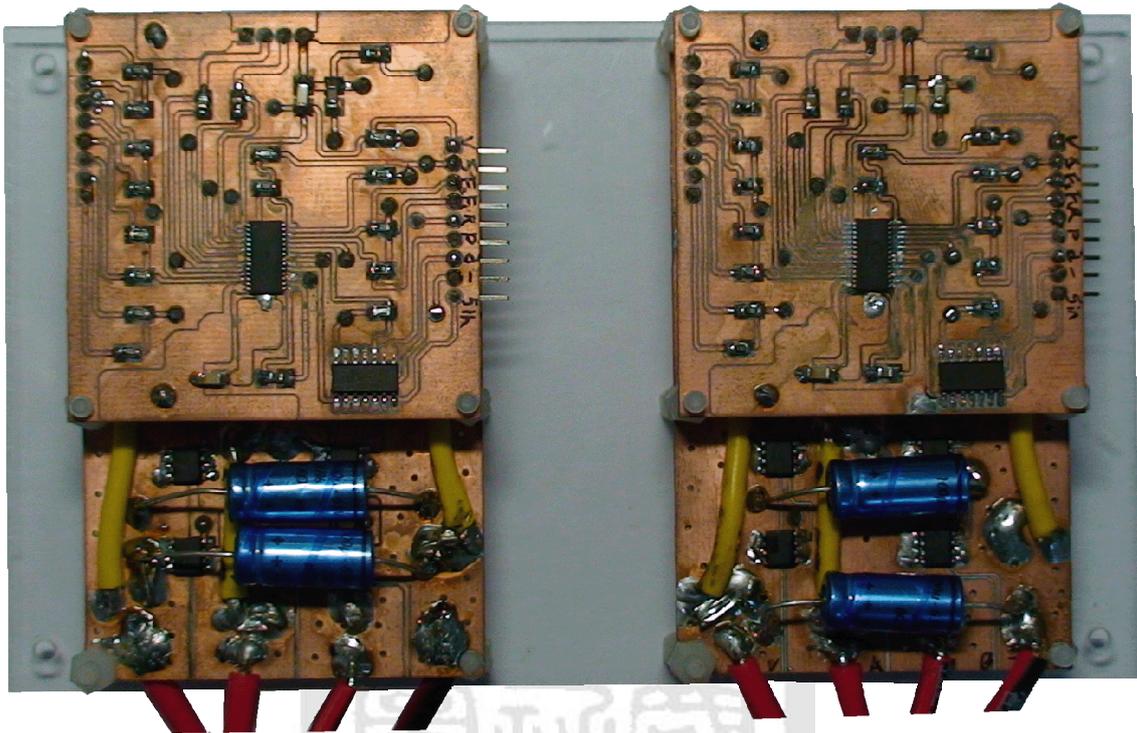


圖 7-10 PWM 驅動電路實體

### 7-2-3 姿態感測電路

由於單輪車系統需要得知系統姿態以運算控制力，進而達到平衡目的，故在本論文中採用慣性量測單位(inertial measurement units)量測系統姿態，接下來將對論文中所使用之慣性量測單元中的加速規以及陀螺儀加以介紹。

#### 7-2-3-1 加速規

加速規主要量測物體加速度，其量測之加速度可分為動態加速度(dynamic acceleration)以及靜態加速度(static acceleration)，動態加速度係指物體本身的移動以及振動所造成之加速度，靜態加速度係指物體靜止

時所受地心引力之重力加速度。本論文所採用之加速規為 ADI 公司所生產之 ADXL330 三軸加速規，此加速規與實驗室 98 級洪聆剛論文「兩輪倒單擺機器人之平衡控制」[7]所使用相同，故其介紹可參閱[7]，在此不多加贅述。並從[7]吾人可得傾角與加速度關係(7-1)式：

$$\theta_p = \sin^{-1} \frac{\|\bar{a}\|}{\|\bar{g}\|} \quad (7-1)$$

其中

$\theta_p$ ：系統傾角

$\bar{a}$ ：加速規量測之加速度

$\bar{g}$ ：重心加速度

由(7-1)式可以知道在運算過程中必須處理反三角函數，這對核心處理晶片是一負擔，故吾人採用近似求其解。吾人知道當角度很小時， $\sin \theta \approx \theta$ ，又單輪車於平衡狀態時，傾倒角度相當的小，故吾人將(7-1)式換為(7-2)式

$$\sin \theta_p = \frac{\|\bar{a}\|}{\|\bar{g}\|} \quad (7-2)$$

並簡化(7-2)式近似為(7-3)式，圖 7-11 為論文中所使用之加速規實體圖以及軸向定義。

$$\theta_p = \frac{\|\bar{a}\|}{\|\bar{g}\|} \quad (7-3)$$

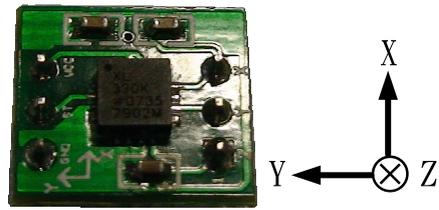


圖 7-11 加速規實體與軸向定義圖

### 7-2-3-2 陀螺儀

本論文所使用之陀螺儀為 InverSense 公司所生產之型號 IDG-300 雙軸陀螺儀以及 ADI 公司生產之型號 ADXRS300 單軸陀螺儀。首先介紹 IDG-300 雙軸陀螺儀，其主要特性如表 7-2，周邊電路圖如圖 7-12。

表 7-2 IDG-300 特性表

工作電壓	3.0 V~3.3 V
量測範圍	$\pm 500$ °/sec
量測靈敏度	2.0 mV/°/sec
參考電壓	1.23 V

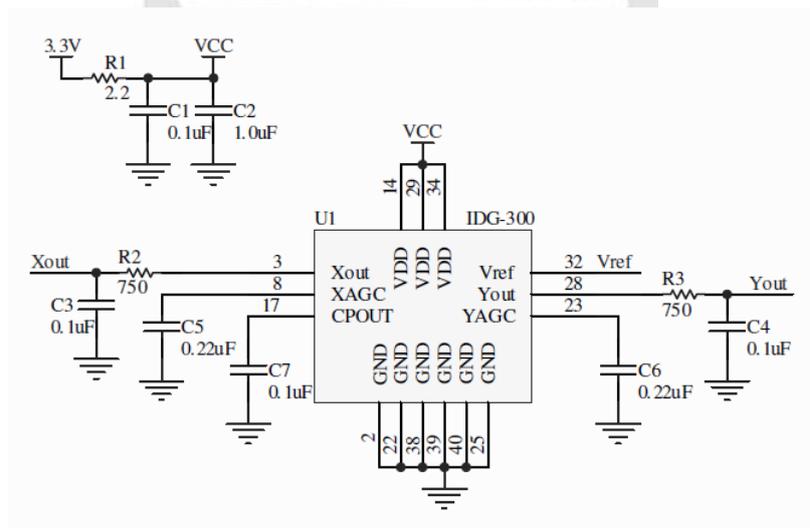


圖 7-12 陀螺儀 IDG-300 周邊電路圖

因為在應用上，吾人需要從陀螺儀得到角速度資訊，故接下來吾人將實際測試陀螺儀輸出電壓與實際角速度的關係，假設其輸出電壓和角速度為線性關係，可寫成

$$\omega_{gyro} = K_{gyro} (v_o - v_{offset}) \quad (7-4)$$

其中

$\omega_{gyro}$ ：陀螺儀所量得之角速度(rad/s)

$K_{gyro}$ ：陀螺儀轉換因子(rad/s/V)

$v_o$ ：陀螺儀輸出電壓(V)

$v_{offset}$ ：陀螺儀基準電壓(V)

其中  $v_{offset}$  可由陀螺儀靜置時得知，如圖 7-13 及圖 7-14 所示，由圖 7-13 可看出陀螺儀 IDG-300 靜置時的 X 軸基準電壓平均為 1.485 V，由圖 7-14 可看出陀螺儀 IDG-3000 靜置時的 Y 軸基準電壓平均為 1.43 V。為求得(7-4)式中的陀螺儀轉換因子  $K_{gyro}$ ，吾人將陀螺儀架設於一具有光學編碼器之旋轉平台上，接著轉動旋轉平台可以得到光學編碼器以及陀螺儀之訊號，最後將光學編碼器所得之旋轉角度進行微分處理以得到旋轉角速度，再經過單位換算後與陀螺儀電壓訊號相比較，藉此得到陀螺儀電壓與角速度之間的轉換因子，由於光學編碼器經微分後所得的角速度訊號雜訊非常嚴重，如圖 7-15，因此無法直接和陀螺儀的量測訊號進行比較，所以在實際驗證實驗中，吾人先將光學編碼器之角速度訊號經過移動平均濾波器(moving average filter)進行處理後，再進行比較。

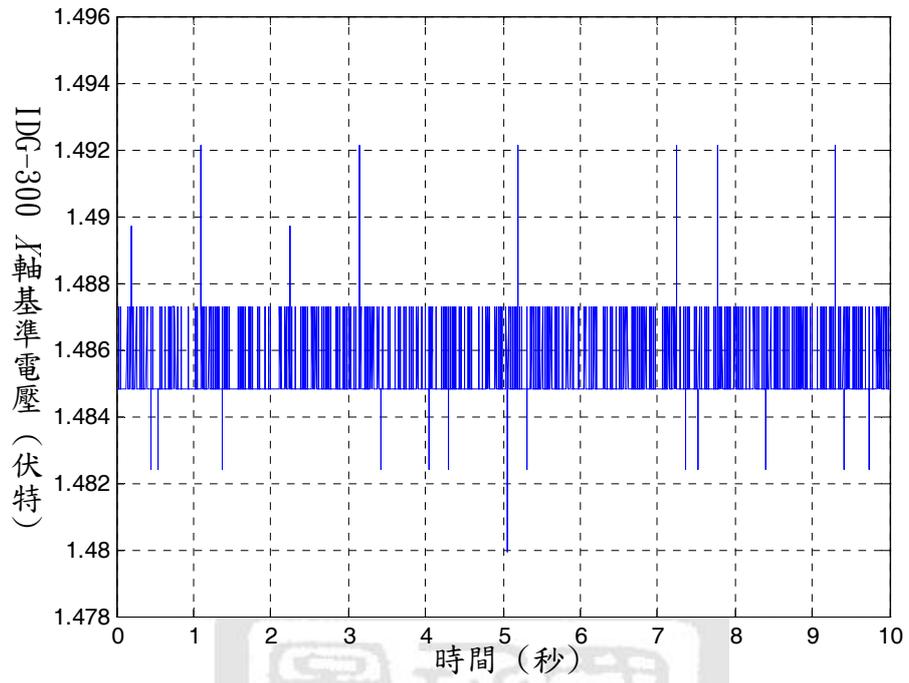


圖 7-13 陀螺儀 IDG-300 之 X 軸基準電壓

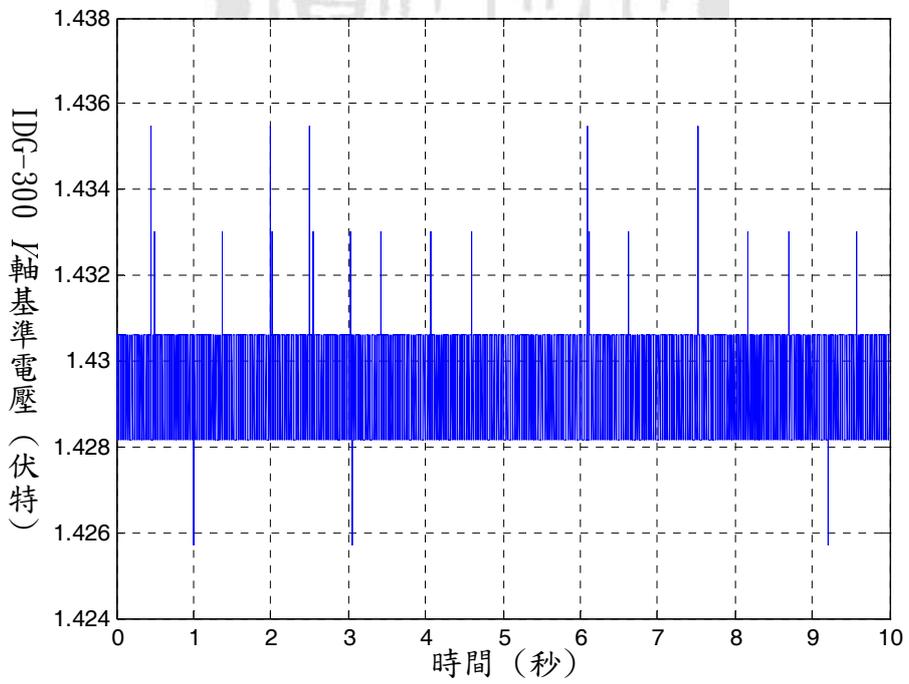


圖 7-14 陀螺儀 IDG-300 之 Y 軸基準電壓

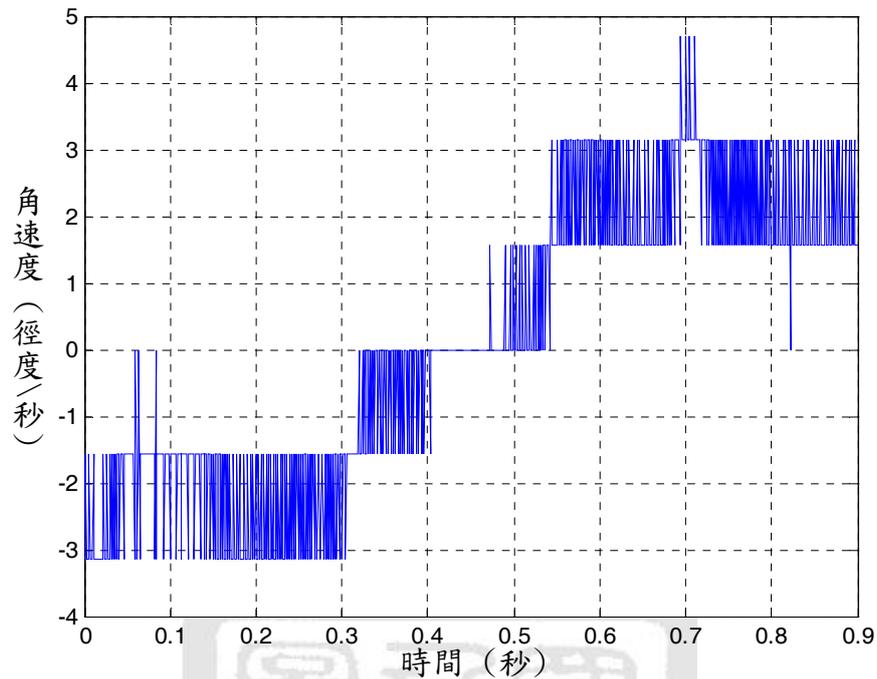


圖 7-15 未經移動平均濾波器處理之光學編碼器訊號

實驗中所使用之移動平均濾波器如(7-5)式所示

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \frac{1}{M} (x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-(M-1)]) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]
 \end{aligned}
 \tag{7-5}$$

其中

$M$  : 取樣比數

$x[n]$  : 輸入訊號

$y[n]$  : 輸出訊號

其意義表示每經過  $M$  筆訊號會先將這  $M$  筆訊號平均之後再輸出，為一般常見的低通濾波器，在本實驗中吾人取  $M$  為 20。整體流程圖如圖 7-16 所示。陀螺儀  $X$  軸訊號與光學編碼器比較如圖 7-17， $Y$  軸如圖 7-18。

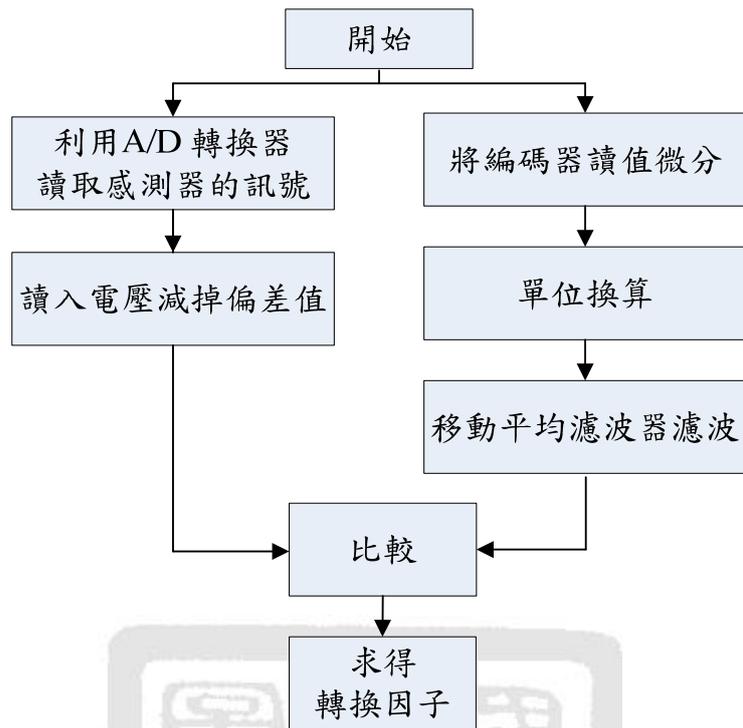


圖 7-16 陀螺儀校正流程圖

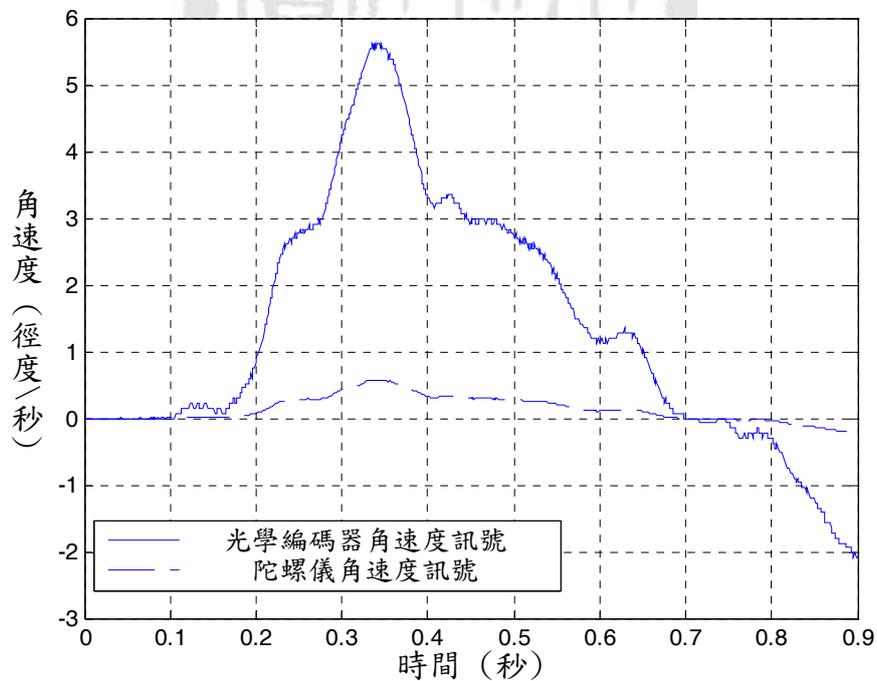


圖 7-17 陀螺儀 X 軸與光學編碼器訊號比較

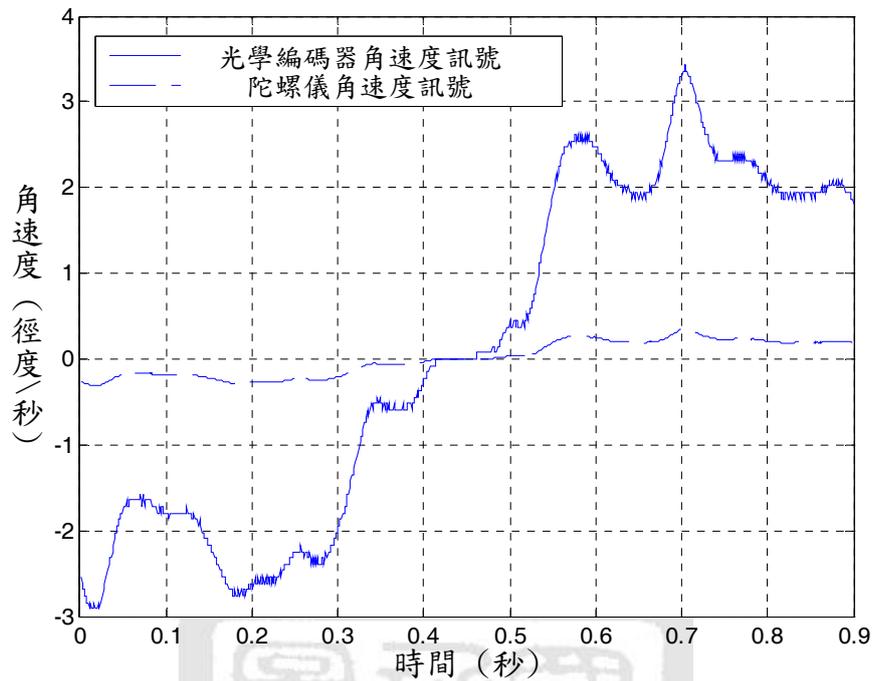


圖 7-18 陀螺儀 Y 軸與光學編碼器訊號比較

由圖 7-17 以及圖 7-18 可發現，陀螺儀訊號與光學編碼器趨勢相似，但差一常數增益，經過實驗後發現，陀螺儀 X 軸訊號乘上轉換因子  $K_{gyrox}$  為 9.9 時，以及陀螺儀 Y 軸訊號乘上轉換因子  $K_{gyroy}$  為 9.7 時，光學編碼器之角速度訊號與陀螺儀量測之角速度訊號重合度最佳。如圖 7-19 及圖 7-20 所示。

經過陀螺儀校正實驗後，吾人可得陀螺儀電壓訊號與角速度關係如 (7-6) 式與 (7-7) 式。

$$\omega_{gyrox} = 9.9(v_{xo} - 1.485) \quad (7-6)$$

$$\omega_{gyroy} = 9.7(v_{yo} - 1.43) \quad (7-7)$$

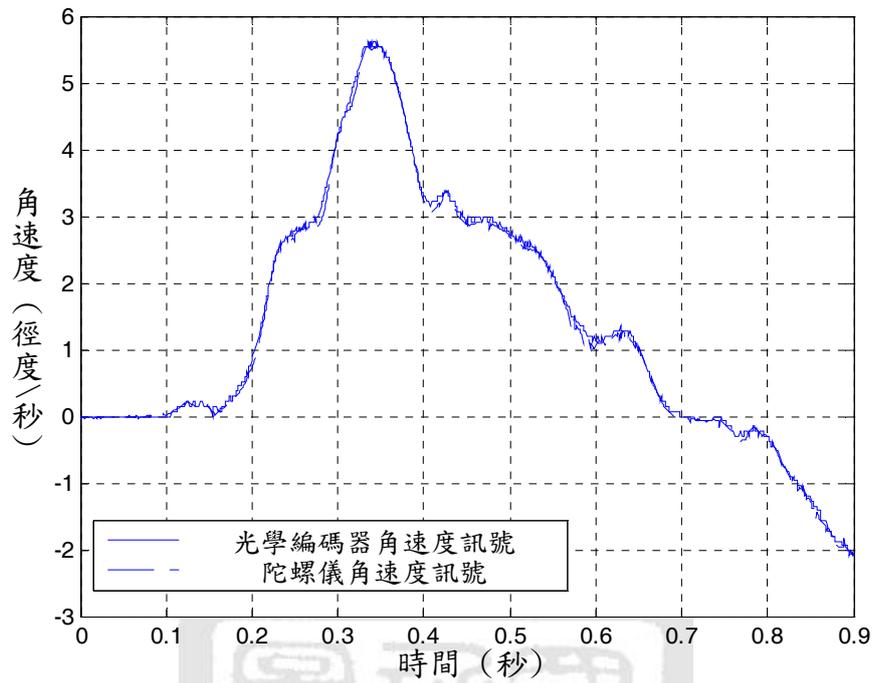


圖 7-19 陀螺儀 X 軸乘上轉換因子與光學編碼器訊號比較

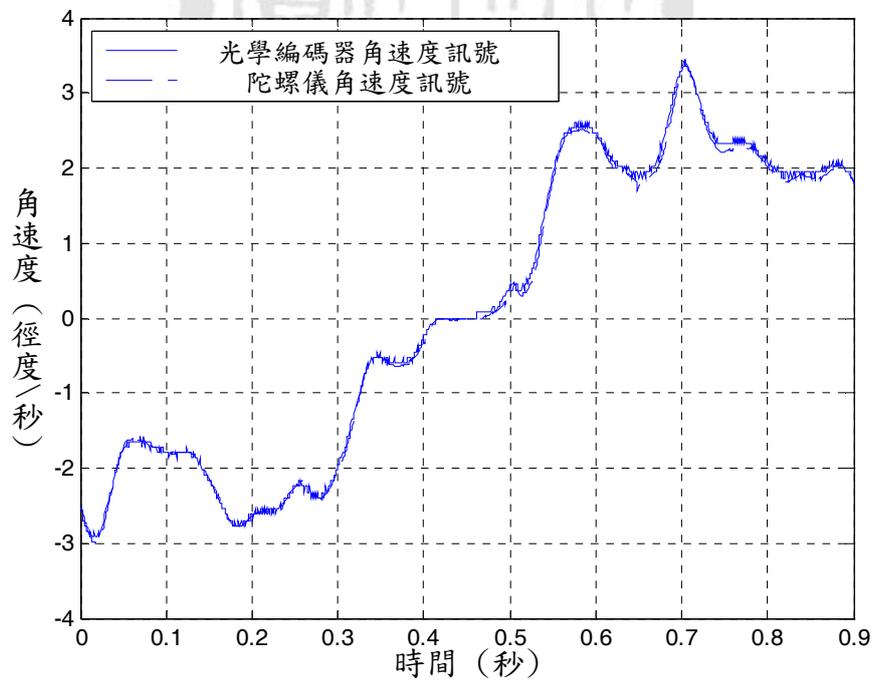


圖 7-20 陀螺儀 Y 軸乘上轉換因子與光學編碼器訊號比較

吾人利用(7-6)式與(7-7)式可以將陀螺儀訊號轉為角速度，以獲得系統姿態。在陀螺儀的架設上，與加速規一樣都具有方向性，所以架設上必需注意軸向是否正確，本論文 IDG-300 陀螺儀實體架設與軸向定義如圖 7-21 所示。

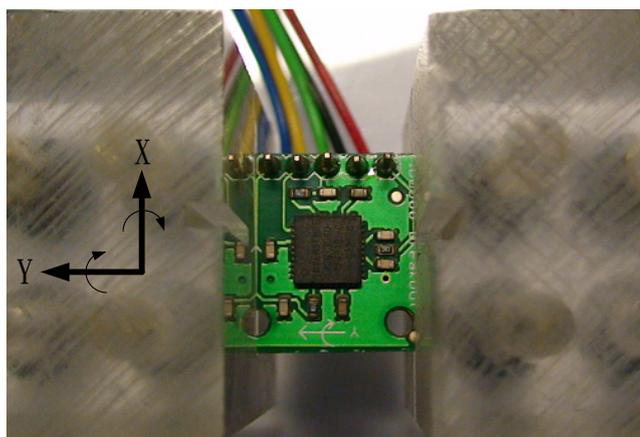


圖 7-21 IDG-300 陀螺儀實體架設與軸向定義圖

而在實作過程中，吾人發現 IDG-300 雖可量測兩軸向之優點，但是卻有著解析度不佳之缺失，造成控制時系統的不穩定，因為在實際控制上發現，Y 軸向必需要有較佳解析度之回授訊號，系統才有較佳穩定度，故本系統以 ADXRS300 單軸陀螺儀代替 IDG-300 之 Y 軸向訊號，以剔除其解析度不佳問題。

吾人可由圖 7-22 明顯看出兩陀螺儀之解析度差異，雙軸陀螺儀 IDG-300 之角速度訊號因為解析度不足而呈現階梯波現象，相較之下單軸陀螺儀 ADXRS300 角速度訊號較為平滑，由此可知 ADXRS300 之單位刻度比 IDG-300 小，故解析度較高。

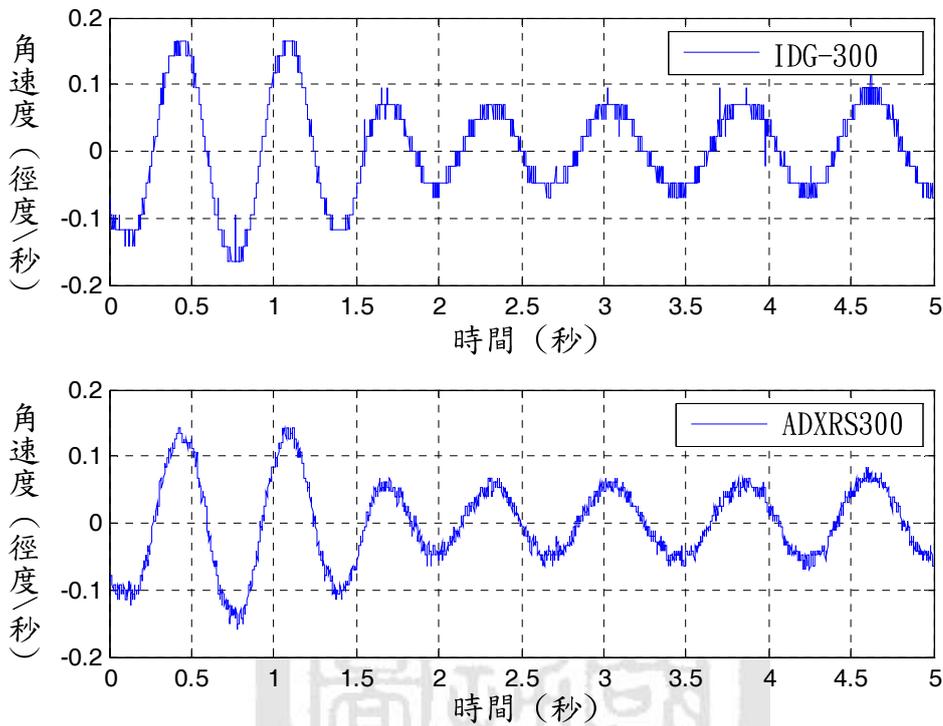


圖 7-22 IDG-300 與 ADXRS300 訊號比較圖

ADXRS300 其主要特性參數如表 7-3 所示，周邊電路如圖 7-23 所示，其實際架設與軸向定義如圖 7-24 所示。應用上，吾人也必須知道 ADXRS300 之轉換因子，故為求其轉換因子，吾人也作了相關的校正實驗，由圖 7-25 可知 ADXRS300 靜置時的基準電壓約為 2.4155 V，由圖 7-26 以及圖 7-27 可發現，當轉換因子為 3.4 時，其陀螺儀角速度訊號與光學編碼器訊號有最佳契合度，並由此可得 ADXRS300 角速度與電壓關係(7-8)式

$$\omega_{gyro\_adxrs} = 3.4(v_{yo} - 2.4155) \quad (7-8)$$

表 7-3 ADXRS300 特性表

工作電壓	4.75 V~5.25 V
------	---------------



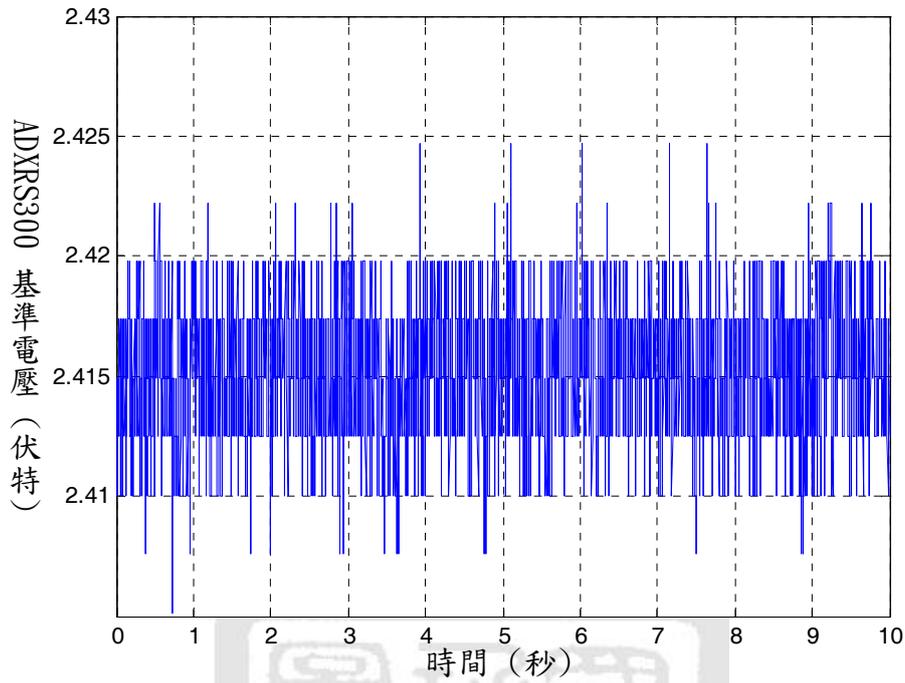


圖 7-25 陀螺儀 ADXRS300 基準電壓

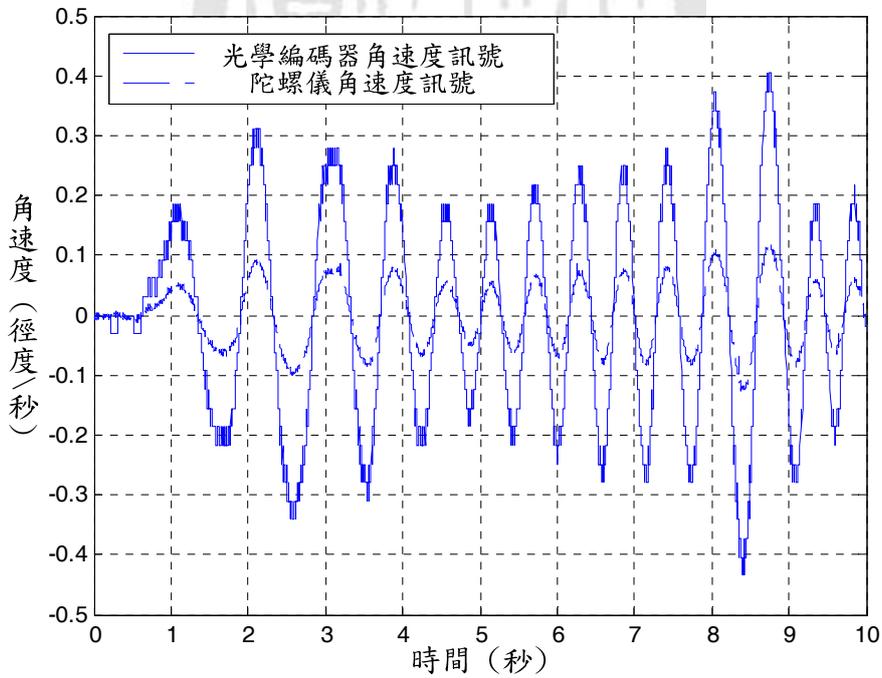


圖 7-26 ADXRS300 與光學編碼器訊號比較

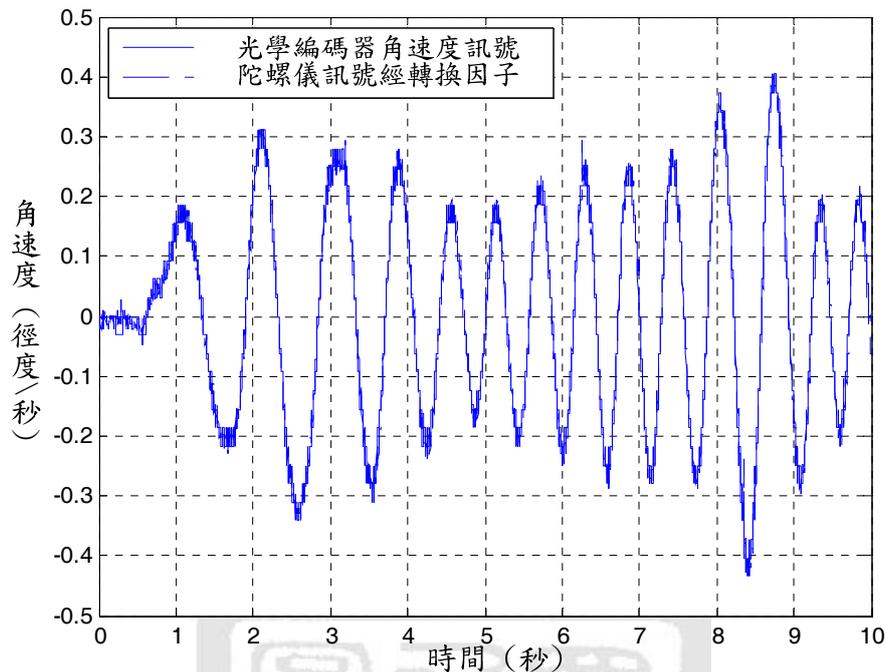


圖 7-27 ADXRS300 乘上轉換因子與光學編碼器訊號比較

### 7-3 系統核心晶片介紹

#### 7-3-1 數位訊號處理器 TMS320F2812

數位訊號處理器 TMS320F2812 的內部核心工作電壓是 1.8 V，外部週邊 I/O 則為 3.3 V，且 CPU 核心含有一 32 位元的中央算數邏輯單元 (Central Arithmetic Logic Unit, CALU) 來執行乘、加運算及邏輯運算。而內部工作頻率是由外部震盪器 (oscillator) 30 MHz，經由相鎖迴路 (phase lock loop, PLL) 所產生的 150 MHz 核心工作頻率，其指令週期時序為 6.67 ns，也就是每秒 150 百萬指令週期 (Million Instructions Per Second, MIPS)，且能夠在一個指令週期內，完成 32×32 位元或兩個 16×16 位元的 MAC (Multiply Add Calculation) 指令計算。在核心記憶體部分，有

五個 SARAM 記憶區塊可供使用者撰寫程式，另外有一 128K 快閃記憶體 (flash)可供程式燒錄之用。其次，處理器內建之週邊電路可與外界 I/O 溝通，如 QEP (Quadrature Encoder Pulse)、PWM (Pulse Width Modulation)、GPIO (General Purpose I/O)，以下將依序詳述之。

### 7-3-1-1 QEP 模組簡介

TMS320F2812 晶片中，內建有兩組 QEP 介面電路，可用來接收光學式編碼器的輸出訊號，此輸出訊號具有可變頻率及 1/4 週期(90 度)相位差之兩串列脈波，藉由判別兩個串列脈波何者超前，即可判斷馬達的旋轉方向，同時藉由脈波數及脈波頻率即可決定馬達旋轉位置與速度。

由光學式編碼器輸出兩個方形編碼脈波之上升邊緣與下降邊緣，會經由 TMS320F2812 內部 QEP 介面電路之 CAP1/QEP1 與 CAP2/QEP2 接腳偵測並計數，並由內部 QEP 介面電路中的方向偵測邏輯來決定光學式編碼器輸出的哪一脈波為超前，然後它將可以產生一個方向信號做為所選擇計時器之方向輸入。例如在 TMS320F2812 的 CAP1/QEP1 接腳偵測到輸入脈波為超前時，則計數器為上數，反之則計數器為下數。

其中，數位訊號處理器內部 QEP 介面電路會自動產生一個方波時脈頻率作為參考基準，並且為光學式編碼器輸入串列脈波之四倍頻，故讀取 QEP 暫存器位址之內含值為實際光學式編碼器所輸出實際值之四倍，因而可以提高解析度。圖 7-28 為光學編碼器產生的脈波及 TMS320F2812 內部計時器時脈與方向示意圖，其中 CAP1/QEP1 和 CAP2/QEP2 為 QEP 電路模組從光學編碼器所讀入的訊號，CLK 則是 QEP 電路模組的時脈訊號，DIR 表示往上計數或是往下計數。

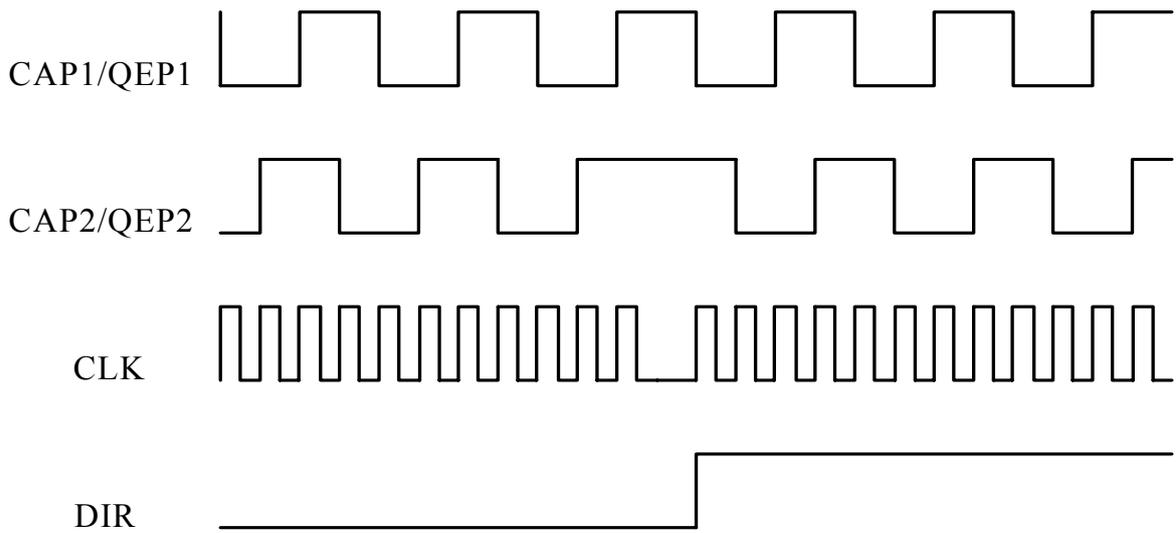


圖 7-28 方形編碼脈波及計數與時脈與方向之示意圖

### 7-3-1-2 PWM 模組簡介

TMS320F2812 晶片中，內部共有 12 個 PWM，並分成 PWM1~6 及 PWM7~12 兩組，提供六相互補的 PWM 波形，可用於兩軸的三相馬達控制。其優點能使馬達在寬廣的操作範圍內，將總諧波失真減至最少，同時降低操作時馬達工作溫度、提高效率、改善功率因數等，並且常使用於馬達的速度控制及位置控制、DC-DC 轉換器、電力電子等運用，應用的範圍相當廣泛。

#### (1) PWM 模組之腳位描述:

在 TMS320F2812 之 PWM 模組中，有兩組共 12 支外部類比輸出入信號接腳，分別為 PWM1~6 與 PWM7~12 兩組接腳，可提供六相互補的 PWM 波形，同時可由外部 PDPINTAn 與 PDPINTBn 接腳提供驅動器保護之用。

## (2) PWM 模組之概要描述:

- (a) PWM 信號是一個具有改變脈波寬度之固定長度週期的串列脈波，此脈波寬度可依據預設值或調變信號來決定。在馬達控制中，PWM 是控制驅動電力到馬達的時間，並可提供三相馬達不同大小的頻率、相電壓、相電流以及能量，進而控制馬達轉速與轉矩。
- (b) 產生 PWM 週期訊號，需要有一個計時器，以重複計數其週期值。此方式為調整比較暫存器的內含值，此內含值將不斷與計時器的計數值做比較，當比較符合時相對應的腳位將會發生轉態；當第二次比較符合時，另一個轉態將產生。因此改變比較暫存器調變值，則 PWM 輸出脈波使外部電路晶體開與關之比例值也跟著改變。在 TMS320F2812 中將由計數器 1 (Timer1) 分別和比較暫存器 1~3 (CMPR1~3) 相比較，對應輸出接腳為 PWM1~6，而計數器 3 (Timer3) 和分別和比較暫存器 4~6 (CMPR4~6) 相比較，對應輸出接腳為 PWM7~12。
- (c) 在直流伺服馬達運動控制上，常利用 T 型或 H 型電路做為驅動電路。因為要避免驅動電路中元件導通週期互相重疊，以致於電路的短路或誤動作，而需利用停滯的方式來避免上述之缺陷，故 PWM 的停滯帶(dead band)設定是相當重要的。一個停滯時間的產生，通常介於一個電晶體導通與另一個電晶體截止之間，此時間將依電晶體或驅動電路的改變而有所變化。
- (d) 由 EV (event manager) 模組產生 PWM 輸出，是以三組比較單元中之一組，與 GP 計時器 1 或 GP 計時器 3、停滯單元與 EV 模

組輸出邏輯之結合，將可產生一組可程式停滯帶與輸出極性之 PWM 輸出。在 EV 模組內，三組比較單元會有六個 PWM 輸出，此六個 PWM 輸出將可以方便地使用在三相交流感應馬達控制或直流無刷馬達，藉由比較動作暫存器 (ACTRx) 之設定，使 PWM 輸出接腳將更有彈性選擇輸出，使其在控制切換式與同步式磁阻馬達更加容易，在實務應用上更加廣泛。

(e) 在 PWM 暫存器的設定上有下列幾個步驟：

- 設定暫存器 ACTRx。
- 若有使用停滯帶時，設定 DBTCONx。
- 初始化 CMPRx。
- 設定 COMCONx。
- 設定 T1CON (EVA) 或 T3CON (EVB) 且開始執行。
- 可重新寫入新值至 CMPRx。

(f) 在計時比較器工作時，可由數位訊號處理器內部暫存器 TxCNT 和暫存器 TxCMPR 相互做比較，來決定 PWM 波形的寬度，以及利用暫存器 TxPR 決定 PWM 的週期時間，且可以設定產生非對稱或對稱之 PWM 波形，由 TxPWM 腳輸出。非對稱波形由於其 PWM 波形為鋸齒波，因此調變出的方形脈波並不在於 PWM 週期中間，如圖 7-29 所示，每一個脈波之寬度僅能從脈波之一邊做改變。另外，對稱波形之特徵，為調變脈波在每一個 PWM 週期中間，如圖 7-30 所示。對稱 PWM 會優於非對稱 PWM 信號，在於每一個 PWM 週期之開始與結束時期間內，會有兩個非主動區域，調整上可較靈活。

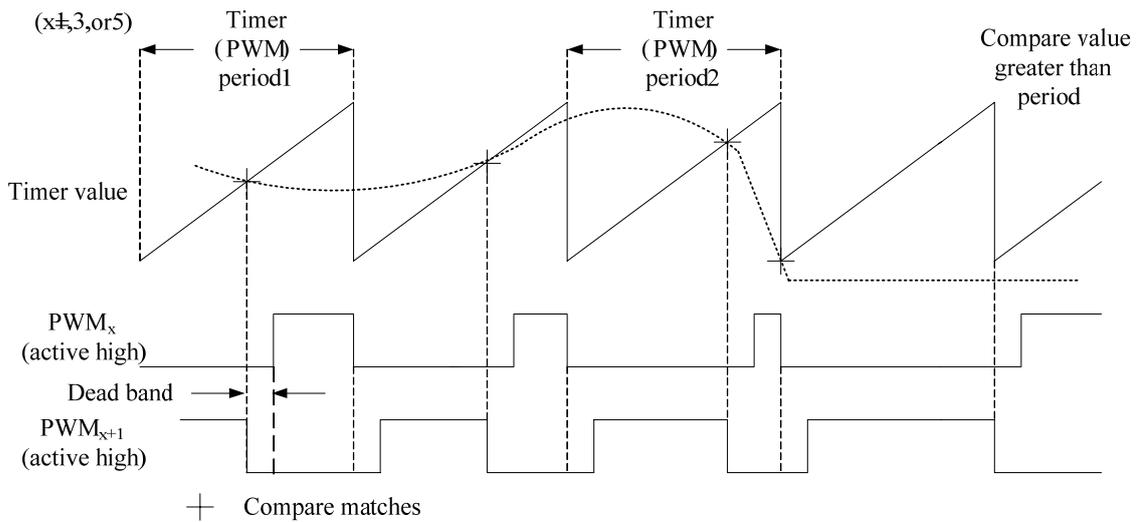


圖 7-29 PWM 非對稱波形示意圖

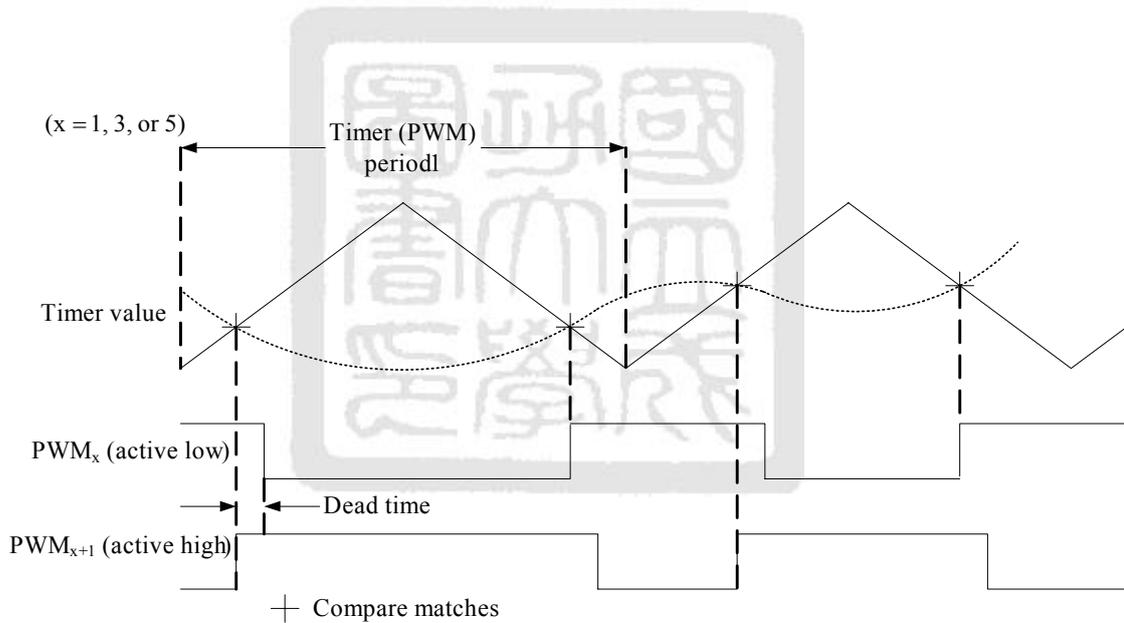


圖 7-30 PWM 對稱波形示意圖

### 7-3-1-3 通用型輸入輸出 (General Purpose I/O, GPIO) 介面

TMS320F2812 晶片中，擁有 56 個通用型輸入輸出 (General Purpose I/O) 接腳，其大部份的接腳都作為晶片內部的專用功能來使用，如

CMPR、QEP、PWM、CAN、SCI、CAP 等專用功能。而 TMS320F2812 內建的 GPIO 模組介面提供了一種靈活的配置方法，可以用來控制並設定每個晶片接腳的使用功能。其中 GPxMux 暫存器是用來選擇晶片接腳的操作模式，藉由此暫存器的設置，便可將晶片接腳設為專用功能模式或是周邊數位 I/O 模式來使用。若晶片接腳被設定為周邊數位 I/O 模式時，還必須透過 GPxDIR 暫存器將其接腳配置為輸入或輸出模式。

而 TMS320F2812 將所有的數位 I/O 接腳進行分組，分別是 GPIO-A、B、D、E、F、G 而每組都可視為一個 I/O 埠。而在 GPIO-A、B、D、E 的部分，當設置為數位 I/O 模式時，必須再設置暫存器 GPxQUAL 以消除 I/O 接腳的雜訊。每個 I/O 埠都有其相關的暫存器，通過不同 I/O 埠暫存器的設定，可將每個 I/O 接腳設定為不同的使用功能。雖然每一個接腳可以擁有不同的功能，但是每一個接腳在同一時間只能當作一種功能使用。另外，GPIO 介面在使用上的設定有下列幾個步驟：

(3) 設定暫存器 GPxMUX：

當 GPxMUX=0，則對應接腳被配置為周邊數位 I/O 模式。

當 GPxMUX=1，則對應接腳被配置為專用功能模式。

(4) 設定暫存器 GPxDIR：

當 GPxDIR=0，則對應接腳被配置為輸入接腳。

當 GPxDIR=1，則對應接腳被配置為輸出接腳。

(5) 設定暫存器 GPxQUAL：

當使用的數位 I/O 埠為 GPIO-A、B、D、E 時，將 GPxQUAL 設置為 0x0000。

## 第八章 互補濾波器

### 8-1 前言

為了達到單輪車系統之平衡控制，吾人必須取得系統的姿態訊號，而系統姿態訊號之正確性，將影響系統響應的優良與否。本論文中，以陀螺儀和加速規來感測車體姿態，其中角速度可以直接由陀螺儀量測訊號取得。角度資訊的部份，第一個方法可由加速規感測取得，但是加速規的量測訊號易受到系統移動、震動或外在雜訊等干擾，嚴重影響角度量測的正確性。另一取得角度資訊之方法為，由陀螺儀量測訊號積分後即可得，但此方法也存在著訊號漂移問題，因為陀螺儀量測訊號含有雜訊及本身的訊號準位漂移，故在積分後，會造成角度的漂移而使角度訊號失真。故本論文採用互補濾波器(complementary filter) [37]-[40]將兩個感測器訊號混合，以改善前述角度量測方法之缺失，進而取得更理想的角度訊號。在 8-2 節中將介紹互補濾波器之架構，8-3 節中將介紹互補濾波器的設計過程以及模擬結果，8-4 節中將展示實際感測器訊號經互補濾波器之結果。

### 8-2 互補濾波器簡介

在實際系統運作的頻域中，要找到一個在系統運作均表現優良之感測器，通常都具有昂貴、笨重、體積龐大的缺點。互補濾波器主要概念是混合兩種不同頻域特性的感測器來量測同一物理量，互相補足另一感測器之短處[38]。當利用兩種不同頻域特性之感測器時，分別利用兩種不同頻段的濾波器對其訊號個別進行濾波處理，取出感測器在各頻域中

輸出訊號表現優良的部分，最後混合兩訊號以求得較佳的量測訊號。本論文中採用加速規以及陀螺儀兩種感測器來感測車體傾角，由於加速規的訊號會因為系統移動以及震動的干擾而影響到高频區段量測訊號之正確性，而陀螺儀的輸出訊號經積分後，則會因為準位偏移誤差以及雜訊的干擾使得積分訊號隨時間而漂移，而此現象可視為低頻雜訊[37]，故吾人分別以低通濾波器取出加速規之低頻訊號，以高通濾波器濾除陀螺儀量測訊號積分後之低頻雜訊，最後混合兩濾波訊號以得到較正確的角度感測值。本論文中所使用之互補濾波器可用(8-1)式表示：

$$\hat{x} = F_1(s)y_a + F_2(s)\frac{y_g}{s} \quad (8-1)$$

其中

$\hat{x}$ ：估測狀態

$y_a$ ：加速規量測所得的傾角

$y_g$ ：陀螺儀量測所得的傾角速度

$F_1(s)$ ：一階低通濾波器

$F_2(s)$ ：一階高通濾波器

吾人為了確保訊號經濾波器處理後，不會產生振幅失真，因此設計上必需符合(8-2)式。

$$F_1(s) + F_2(s) = 1 \quad (8-2)$$

當滿足(8-2)式條件時，則稱此濾波器為互補濾波器。本系統之互補濾波器處理流程圖如圖 8-1 所示。

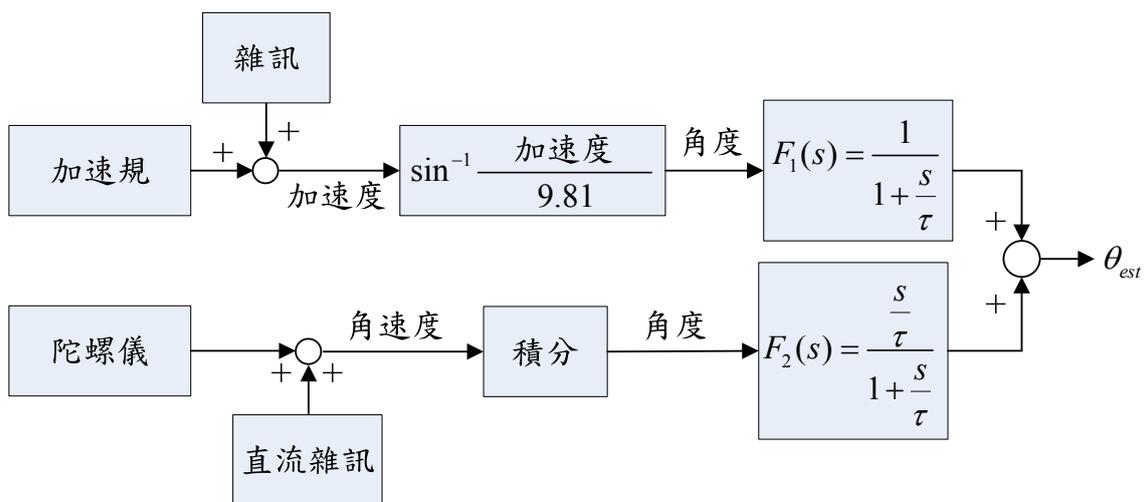


圖 8-1 互補濾波器處理流程方塊圖

其中

$\tau$ ：時間常數，其定義為  $\tau \equiv 2\pi f_c$ ， $f_c$  為濾波器的截止頻率

$\hat{\theta}_{est}$ ：估測角度

### 8-3 互補濾波器之設計實現與模擬結果

在本節中，將介紹 8-2 節所提之一階數位高通與低通濾波器的實現，因為 8-2 節中的濾波器是屬於頻率域，在應用上必需先對其轉回時間域，再得到濾波器的差分方程式後，才得以使用。吾人將最後之結果以 MATLAB 進行模擬。首先考慮低通濾波器：

$$F_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\tau}} \quad (8-3)$$

其中

$Y_1(s)$ ：低通濾波器輸出

$U_1(s)$ ：低通濾波器輸入

將(8-3)式移項後可以得到

$$Y_1(s) + \frac{s}{\tau} Y_1(s) = U_1(s) \quad (8-4)$$

取反拉式轉換後可以得到

$$y_1(t) + \frac{1}{\tau} \dot{y}_1(t) = u_1(t) \quad (8-5)$$

接下來要將(8-5)式離散化，考慮微分的數值近似公式為

$$\dot{y}_1(t)|_{t=kT} \approx \frac{y_{1k} - y_{1k-1}}{T} \quad (8-6)$$

其中  $T$  為取樣時間， $y_{1k}$  為  $y_1$  在第  $K$  時刻的取樣值， $y_{1k-1}$  為  $y_1$  在第  $K-1$  時刻的取樣值，則(8-5)式可以寫成差分方程式為

$$y_{1k} + \frac{1}{\tau} \left( \frac{y_{1k} - y_{1k-1}}{T} \right) = u_{1k} \quad (8-7)$$

$u_{1k}$  為  $u_1$  在  $K$  時刻的取樣值，(8-7)式經移項整理後可以寫為

$$y_{1k} = \frac{\frac{1}{\tau}}{T + \frac{1}{\tau}} y_{1k-1} + \frac{T}{T + \frac{1}{\tau}} u_{1k} \quad (8-8)$$

令

$$\alpha \equiv \frac{T}{T + \frac{1}{\tau}} \quad (8-9)$$

由(8-9)式，可以將(8-8)式寫成

$$y_{1k} = (1 - \alpha)y_{1k-1} + \alpha u_{1k} \quad (8-10)$$

接下來考慮高通濾波器：

$$F_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{\frac{s}{\tau}}{1 + \frac{s}{\tau}} \quad (8-11)$$

其中

$Y_2(s)$ ：高通濾波器輸出

$U_2(s)$ ：高通濾波器輸入

同理，將(8-11)式移項後取反拉式轉換可以得到

$$y_2(t) + \frac{1}{\tau} \dot{y}_2(t) = \frac{1}{\tau} \dot{u}_2(t) \quad (8-12)$$

經由離散化後移項整理可以得到

$$y_{2k} = \frac{\frac{1}{\tau}}{T + \frac{1}{\tau}} (y_{2k-1} + u_{2k} - u_{2k-1}) \quad (8-13)$$

其中  $y_{2k}$  為  $y_2$  在第  $K$  時刻的取樣值， $y_{2k-1}$  為  $y_2$  在第  $K-1$  時刻的取樣值， $u_{2k}$

為  $u_2$  在第  $K$  時刻的取樣值， $u_{2k-1}$  為  $u_2$  在第  $K-1$  時刻的取樣值，令

$$\beta \equiv \frac{\frac{1}{\tau}}{T + \frac{1}{\tau}} \quad (8-14)$$

可以將(8-13)式簡化為

$$y_{2k} = \beta(y_{2k-1} + u_{2k} - u_{2k-1}) \quad (8-15)$$

由(8-10)式與(8-15)式，可發現濾波器必需設計的部份為時間常數  $\tau$ ，或是截止頻率  $f_c$ ，而截止頻率的設計必須盡量取高，這樣才能確保陀螺儀之低頻雜訊得予濾除，但過高的截止頻率可能使得加速規的高頻雜訊進入系統，故截止頻率的選取將是影響互補濾波器輸出訊號正確性之重要因素。

接下來，為驗證吾人所設計之互補濾波器性能，將先以 MATLAB 進行模擬，模擬中，取樣時間為 0.001 秒，而加速規量測角度模擬訊號為(8-16)式所示

$$\theta_{acc} = \sin(t) + n_1(t) \quad (8-16)$$

其所量得的角度為  $\sin(t)$  加上一量測雜訊  $n_1(t)$ ， $n_1(t)$  為一平均值為零之隨機雜訊，訊號  $\theta_{acc}$  如圖 8-2 所示。而陀螺儀所量測之模擬角速度訊號為(8-17)式所示

$$\omega_{gyro} = \cos(t) + n_2(t) \quad (8-17)$$

其所量得的角速度為  $\cos(t)$  加上一量測雜訊  $n_2(t)$ ，而  $n_2(t)$  為一平均值為 -0.02 之隨機雜訊，用來模擬陀螺儀直流準位的漂移現象，則訊號  $\omega_{gyro}$  如圖 8-3 所示。

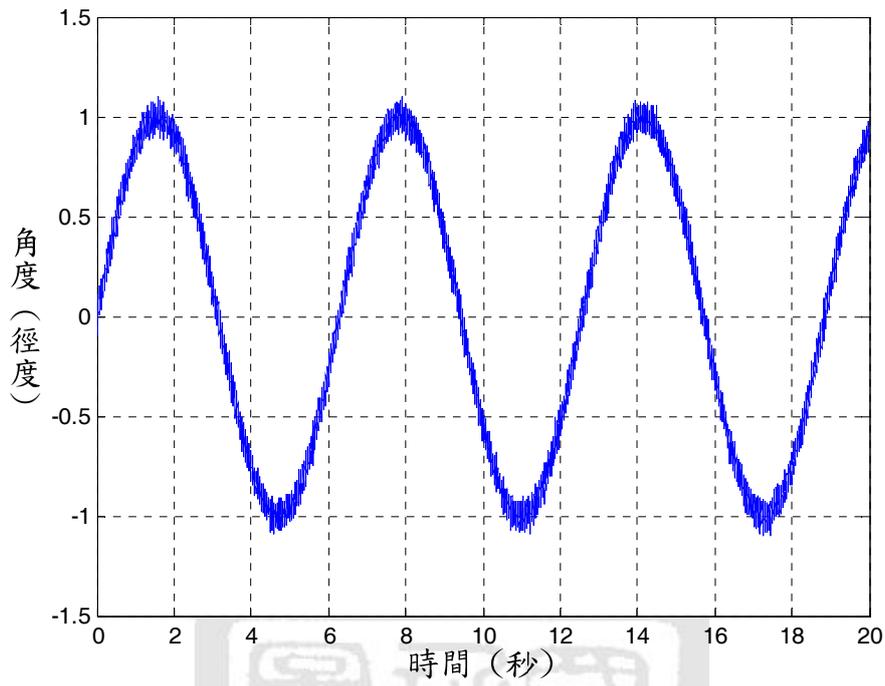


圖 8-2 加速規量測角度模擬圖

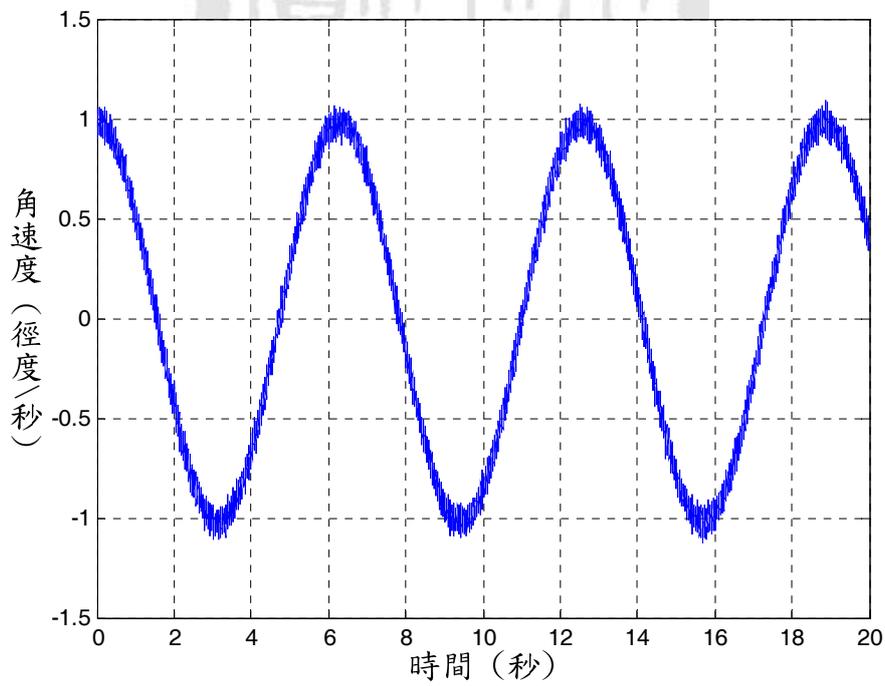


圖 8-3 陀螺儀量測角速度模擬圖

吾人令理想角度訊號 $\theta_{ideal}$ 為(8-18)式

$$\theta_{ideal} = \sin(t) \quad (8-18)$$

$\theta_{ideal}$ 訊號如圖 8-4 所示。首先由圖 8-2 與圖 8-4 比較可知直接由加速規所得之訊號無法直接使用。接著將陀螺儀所得之角速度訊號經積分後與理想角度比較，模擬圖如圖 8-5 所示。由圖 8-5 可發現陀螺儀訊號隨著時間的累積，積分結果會嚴重的漂移，綜合上述吾人得知直接由加速規量測角度或由陀螺儀之角速度訊號經積分後角度當作系統之角度回授都是不可行的。接下來將使用互補濾波器來改善角度訊號並與理想角度比較，首先由圖 8-6 至圖 8-8 的頻譜分佈圖可知，為了濾除陀螺儀積分後的低頻雜訊及加速規訊號的高頻雜訊，吾人設定截止頻率 $f_c = 2.5$  Hz。

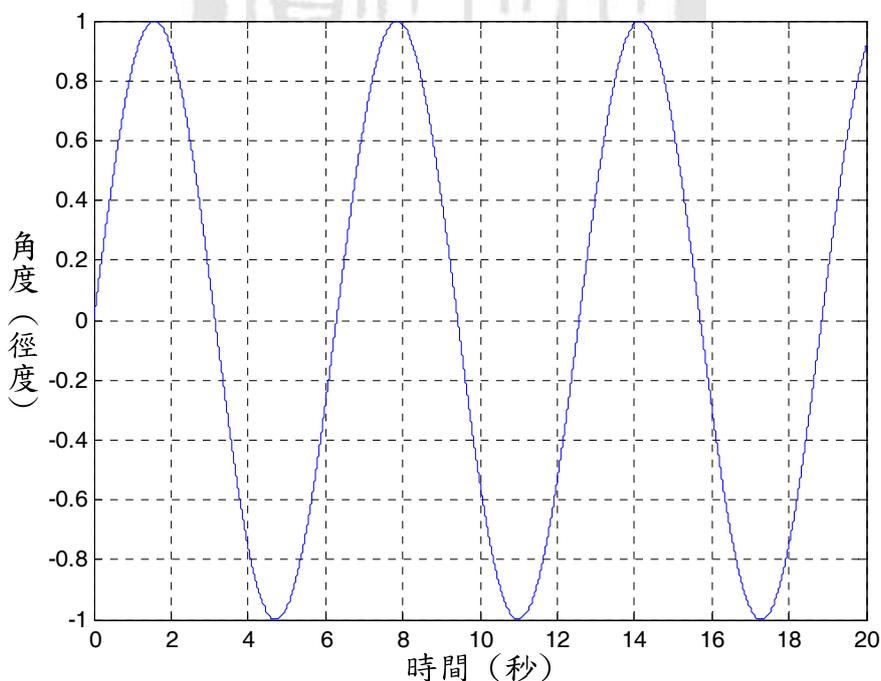


圖 8-4 理想角度模擬圖

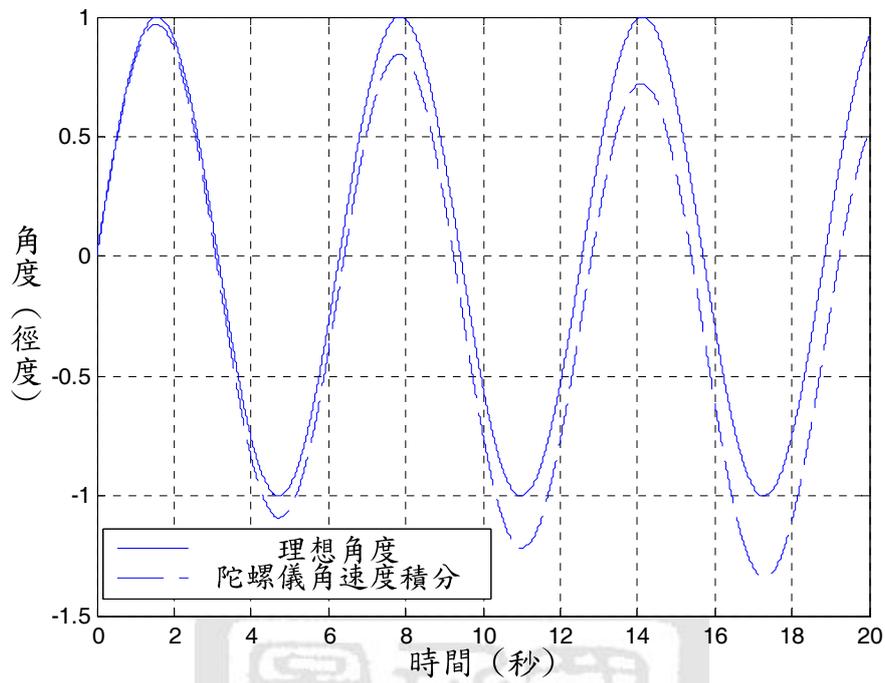


圖 8-5 陀螺儀角速度訊號經積分模擬圖

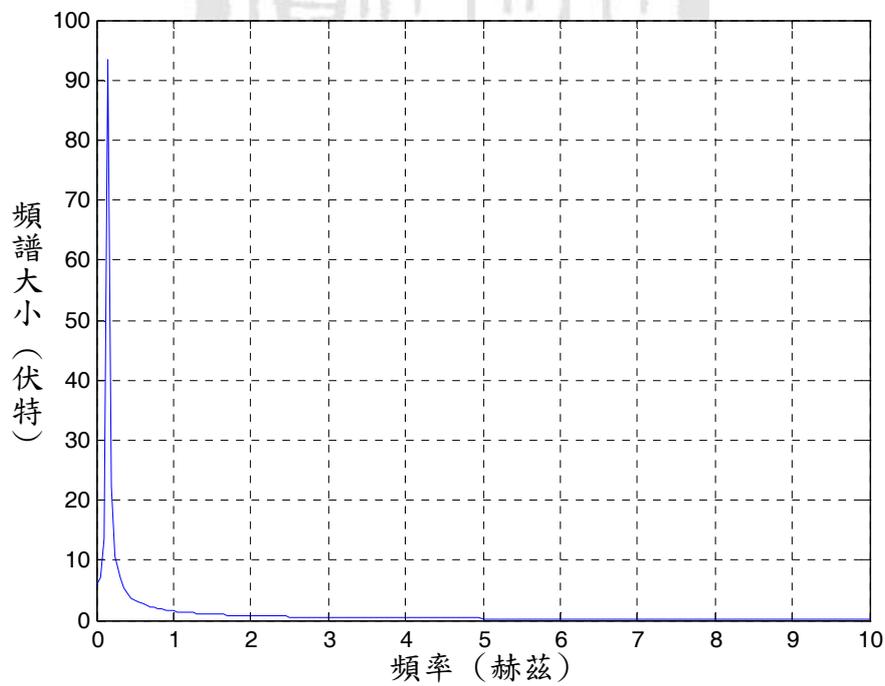


圖 8-6 理想角度頻譜

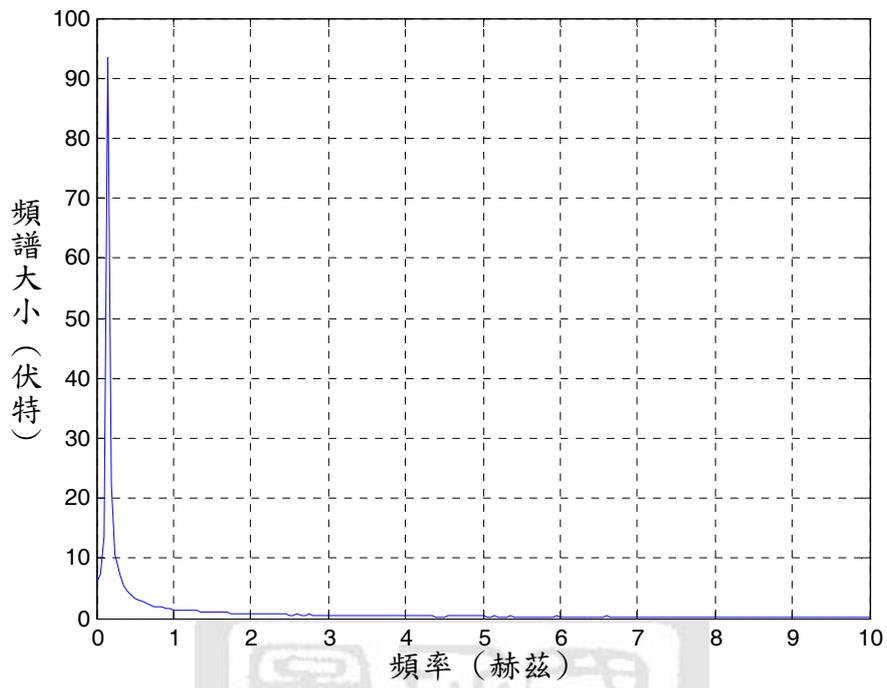


圖 8-7 加速規模擬角度頻譜

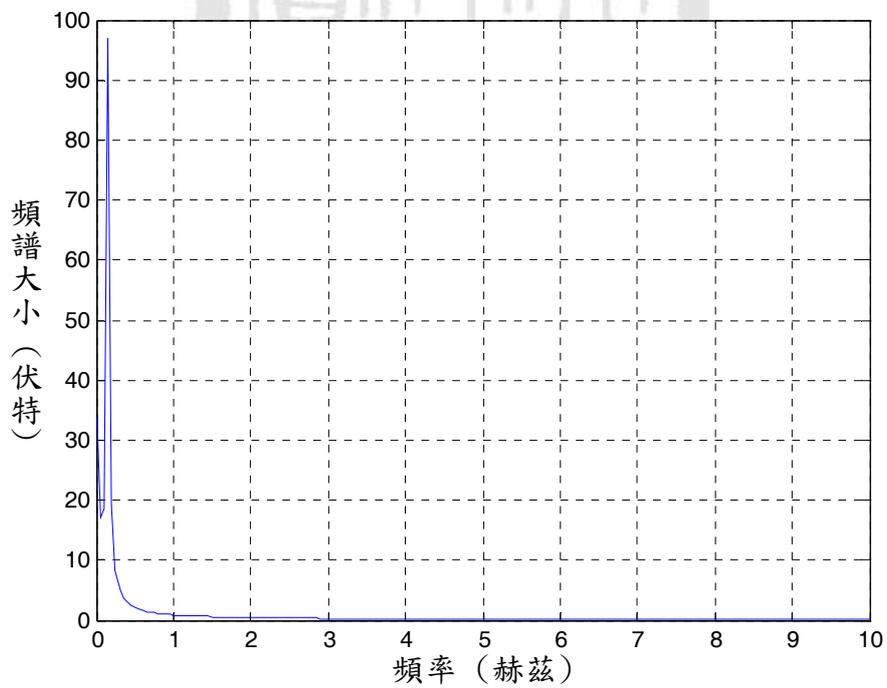


圖 8-8 陀螺儀模擬積分角度頻譜

接下來將加速規與陀螺儀所量測之角度訊號經互補濾波器混合後與理想角度比較，其模擬圖如圖 8-9、局部放大圖如圖 8-10 所示。由圖 8-9、圖 8-10 可以看出濾波器輸出訊號和理想角度幾乎重疊，因此所設計的互補濾波器確實改善了加速規訊號裡面所摻雜的雜訊以及陀螺儀量測訊號積分所造成的漂移現象。接著比較當加速規角度訊號經由低通濾波器後，以及陀螺儀角度訊號經由高通濾波器後，與互補濾波器之效能，比較圖如圖 8-11 所示。由圖 8-11 可發現陀螺儀積分後經高通濾波器，雖然改善漂移的現象，但震幅卻嚴重失真，而加速規角度訊號經低通後，雖然改善了雜訊的問題，但產生了些許相位與震幅的失真，由圖 8-12 與理想角度誤差值可更清楚知道互補濾波器之輸出與加速規角度訊號經低通濾波後之效能差異。綜合上述之模擬比較，吾人得知互補濾波器可得到較佳的角度訊號，而且在實際應用上的運算過程並不複雜且易於實現。

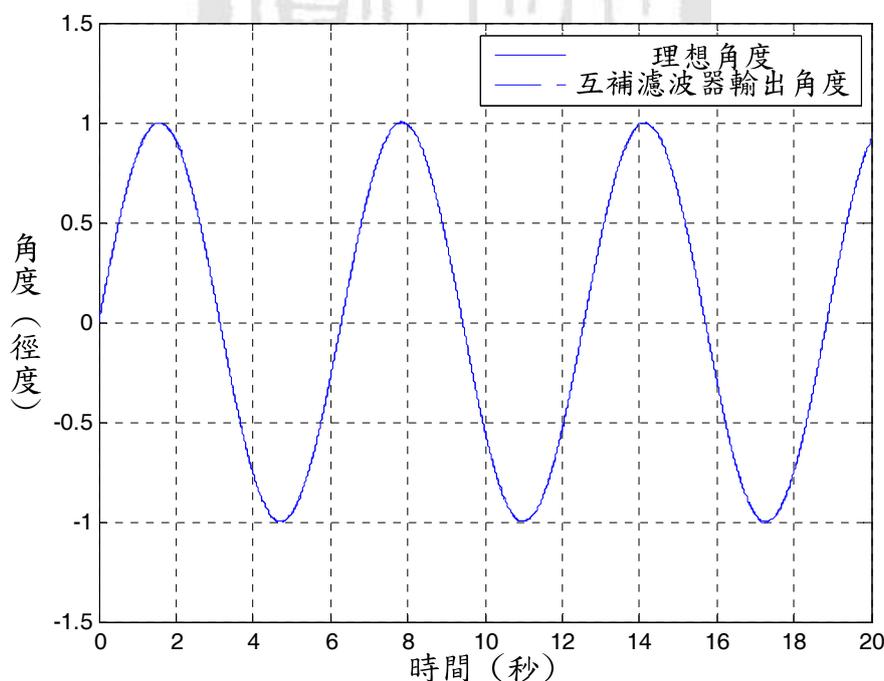


圖 8-9 互補濾波器輸出角度與理想角度比較

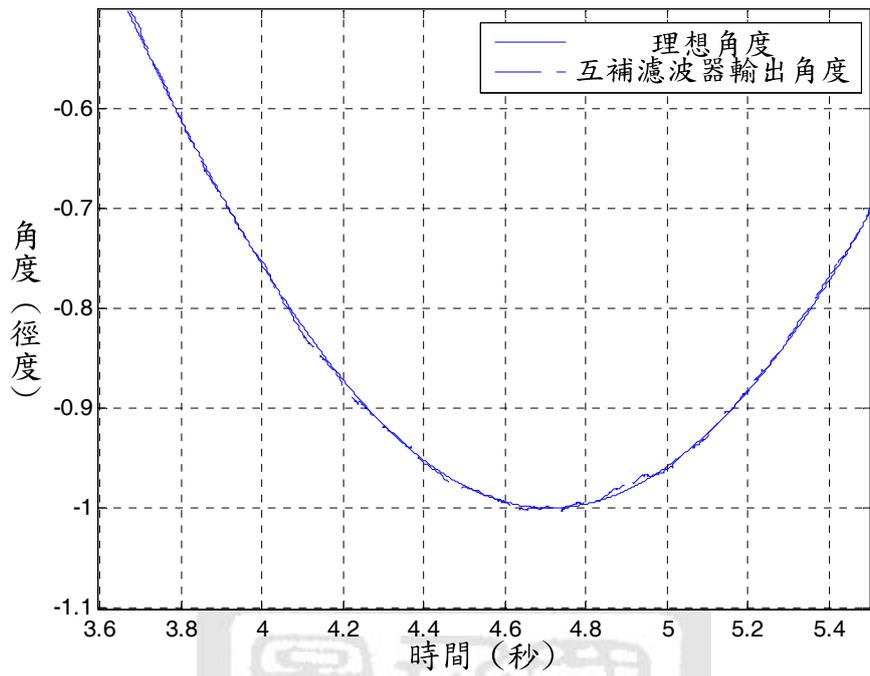


圖 8-10 互補濾波器輸出角度與理想角度比較局部放大圖

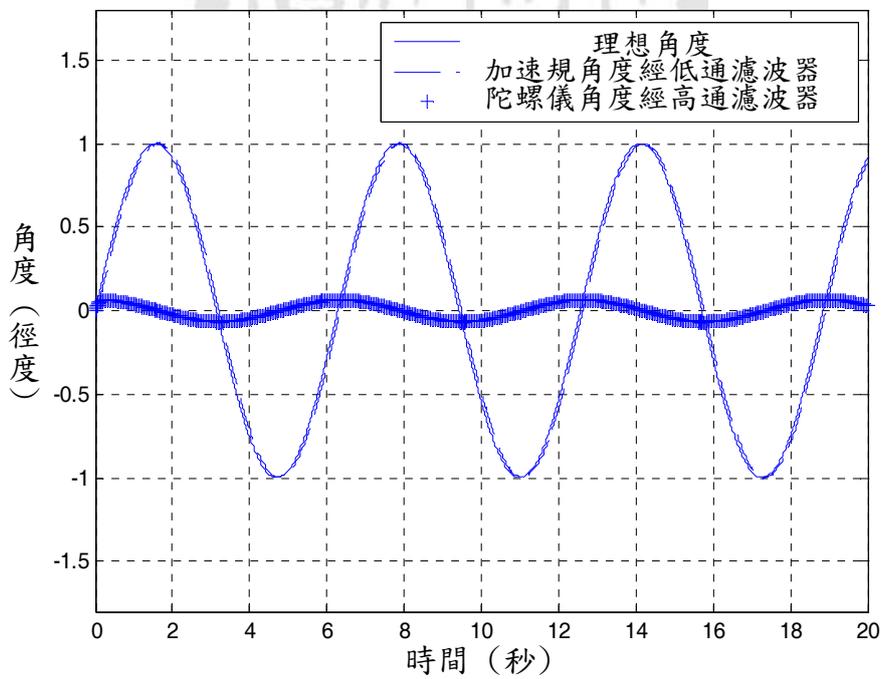


圖 8-11 濾波器之比較

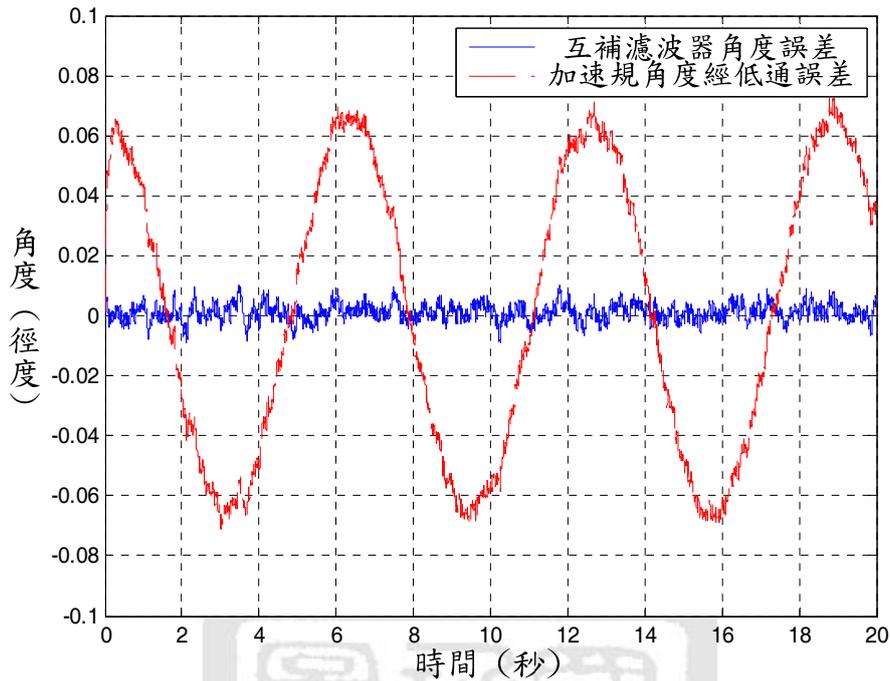


圖 8-12 濾波器訊號與理想角度誤差

#### 8-4 互補濾波器實作驗證

本節將使用系統上感測器之實際訊號，實現前述互補濾波器之驗證。因為系統上，有兩種型號之陀螺儀，故吾人將對其個別驗證，驗證實驗中，吾人以光學編碼器作為理想角度參考值，因為光學編碼器不易受搖晃及雜訊之干擾而且精準度高，故適合作為基準角度。此驗證實驗採用企誠公司所生產之型號 HS30 光學編碼器，其解析度為 500 ppr，實際量測角度訊號如圖 8-13，而因為其解析度不足而有階梯波現象，故吾人將其訊號經移動平均濾波器處理，結果如圖 8-14 所示。首先為加速規 ADXL330 搭配陀螺儀 IDG-300 之驗證實驗，實際系統加速規角度訊號如圖 8-15，由圖 8-15 可看出實際加速規角度訊號雜訊參雜嚴重，實際系統陀螺儀 IDG-300 角速度訊號如圖 8-16。

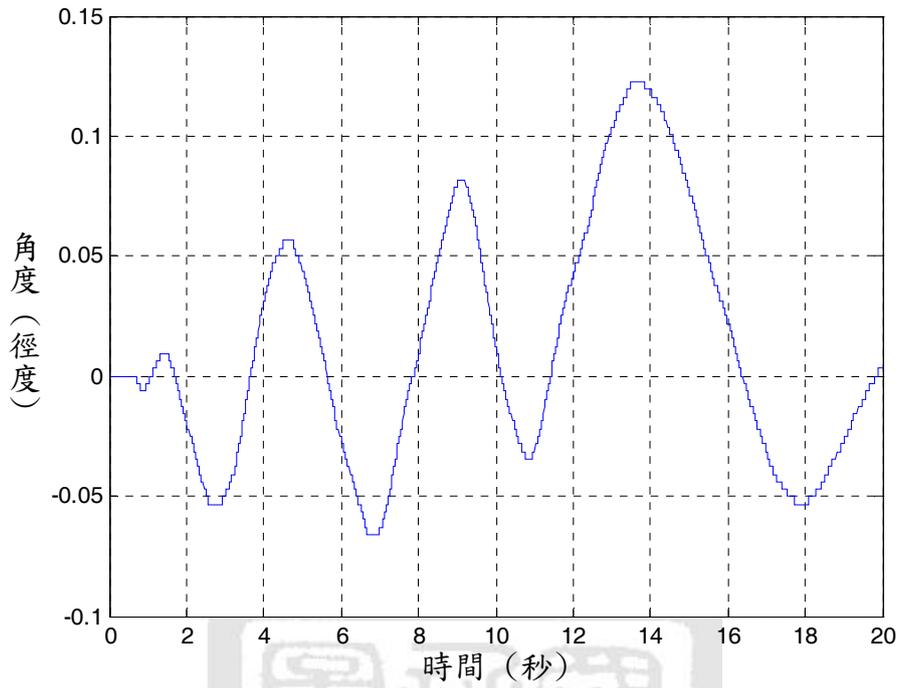


圖 8-13 光學編碼器量測角度訊號圖

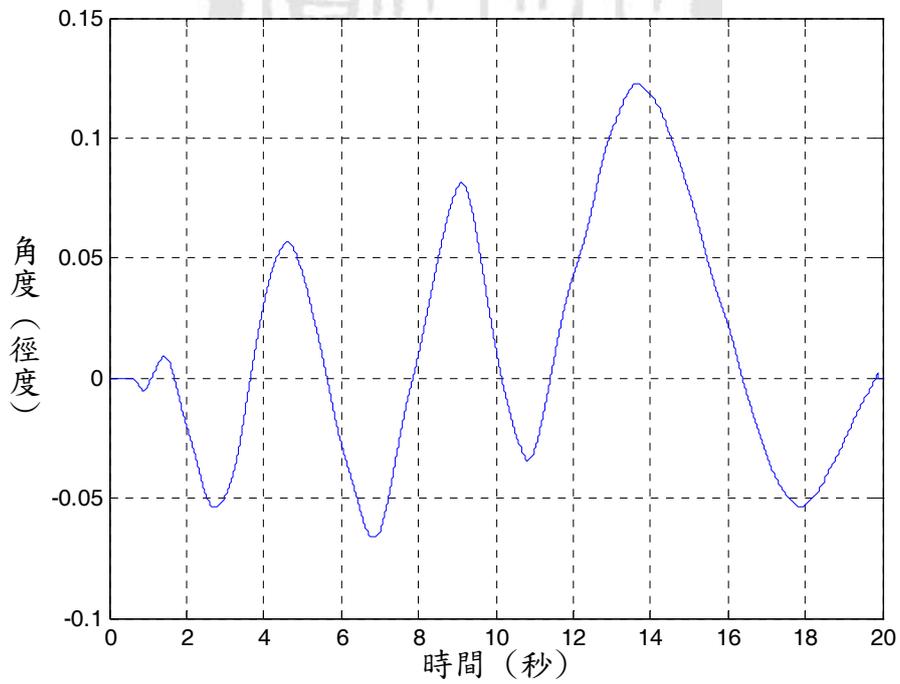


圖 8-14 光學編碼器量測角度經移動平均濾波器訊號圖(IDG-300)

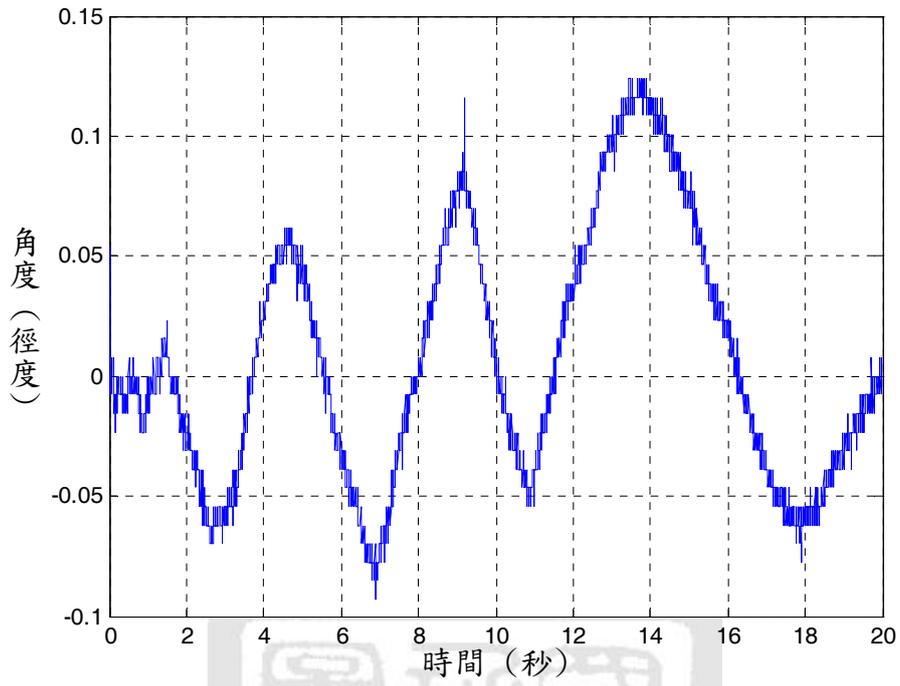


圖 8-15 實際加速規量測角度訊號圖(IDG-300)

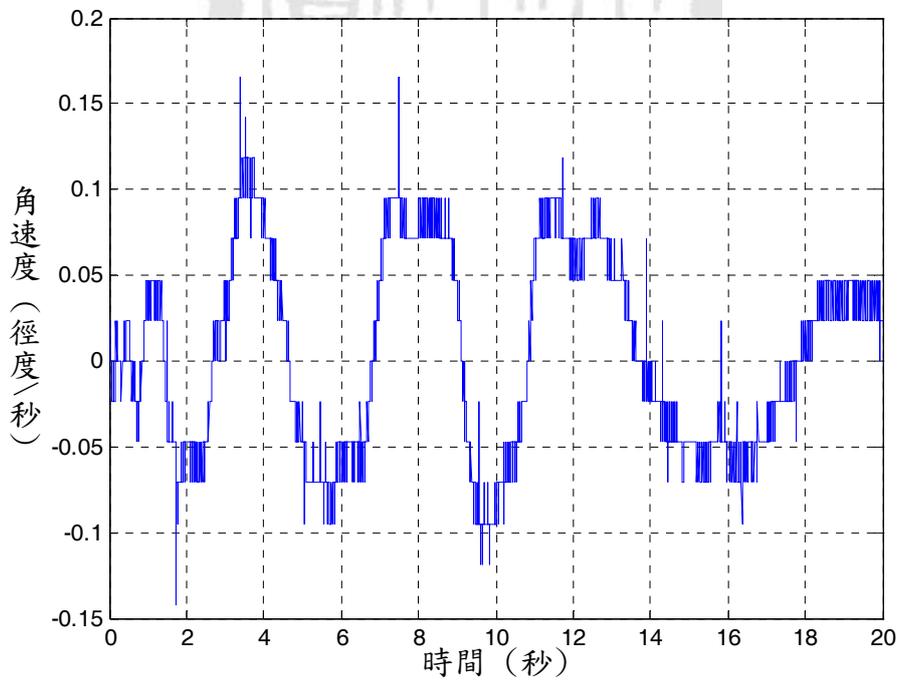


圖 8-16 實際陀螺儀 IDG-300 量測角速度圖

將陀螺儀角速度訊號經積分後與基準角度比較可看出角度漂移，如圖 8-17。接下來將使用互補濾波器改善角度訊號並與理想角度比較，首先由圖 8-18 至圖 8-20 的頻譜分佈圖，吾人設定截止頻率  $f_c$  大約為 25 Hz。

接下來將對量測訊號進行濾波器處理及比較，首先圖 8-21 為加速規量測角度經低通濾波器後與基準角度做比較，由圖 8-21 可看出角度訊號經低通濾波後有落後之傾向。由圖 8-22 陀螺儀角速度訊號積分後再經過高通濾波後與基準角度比較，可看出經高通濾波器後，訊號振幅已縮小失真，無法當作角度回授。圖 8-23 為經過互補濾波器處理之角度訊號與基準角度比較，由圖 8-23 可看出濾波訊號非常接近基準角度，故可驗證互補濾波器之效能以及可行性。圖 8-24 為互補濾波器與基準角度誤差值與加速規角度訊號經低通濾波器後與基準角度誤差值比較圖，由圖 8-24 可看出互補濾波器的確優於單純使用加速規。

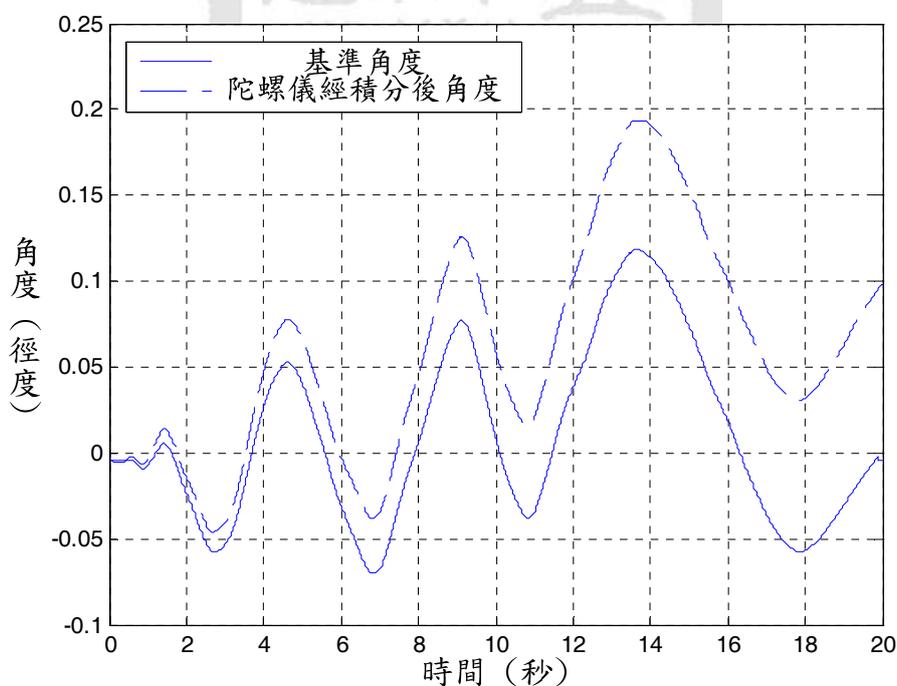


圖 8-17 陀螺儀 IDG-300 角速度經積分與基準角度比較圖

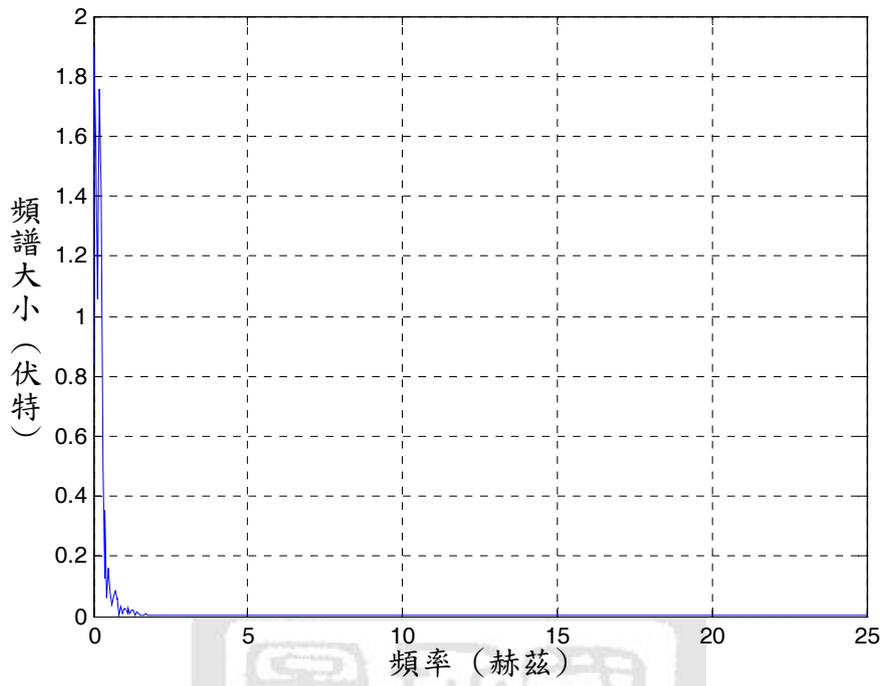


圖 8-18 光學編碼器角度頻譜(IDG-300)

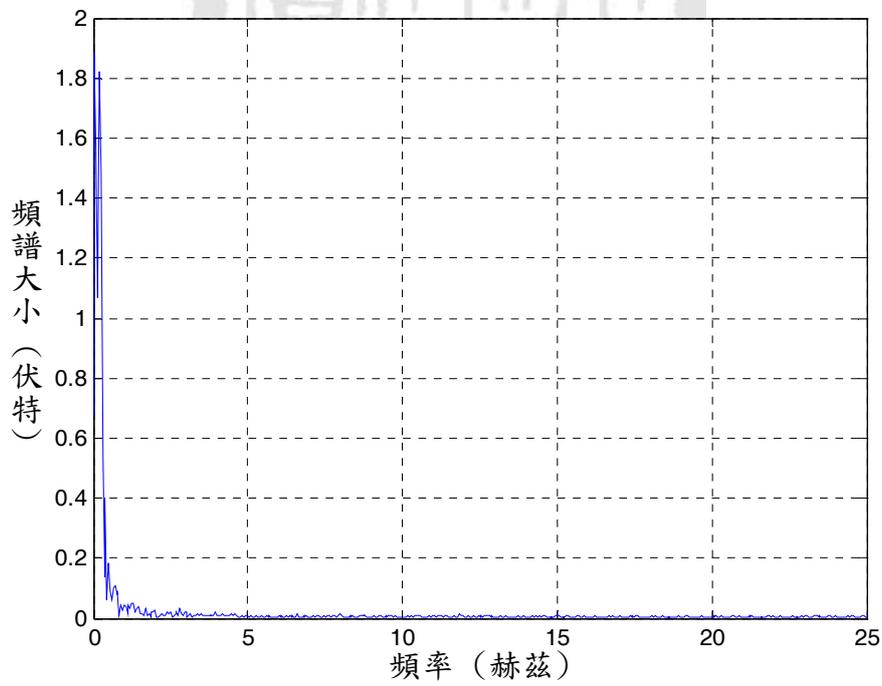


圖 8-19 加速規角度頻譜(IDG-300)

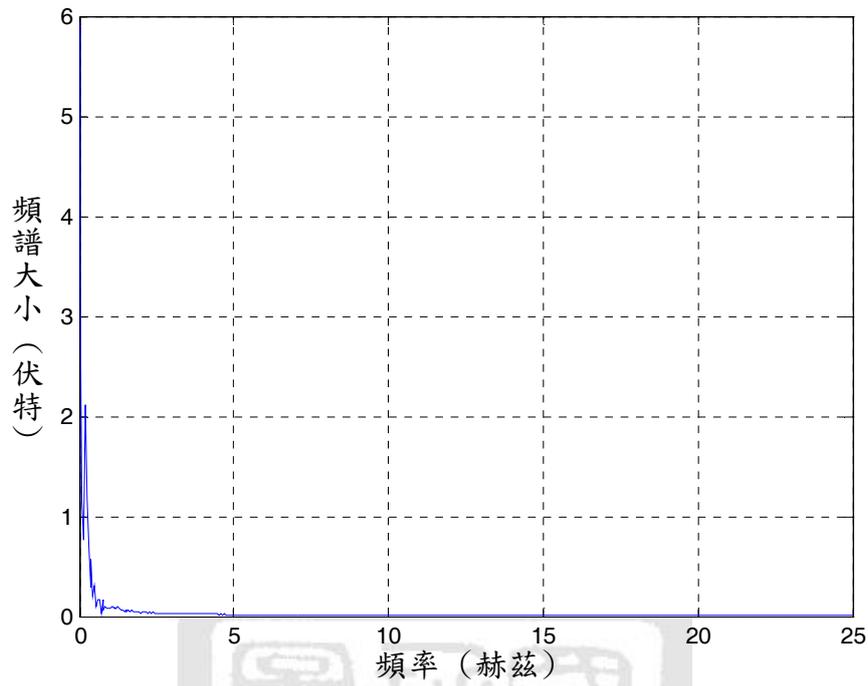


圖 8-20 陀螺儀積分角度頻譜(IDG-300)

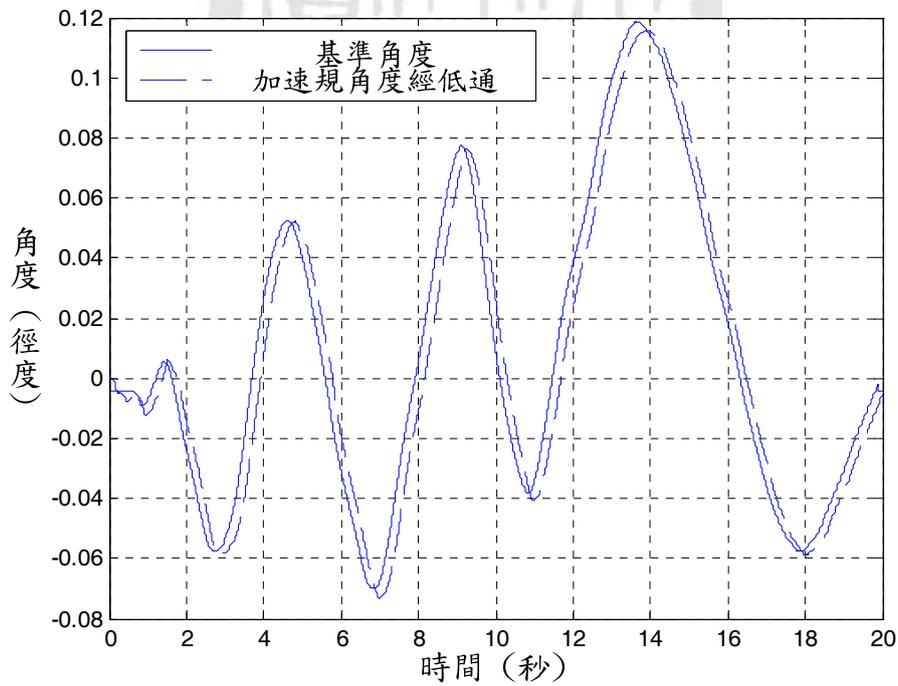


圖 8-21 加速規角度經低通濾波與基準角度比較圖(IDG-300)

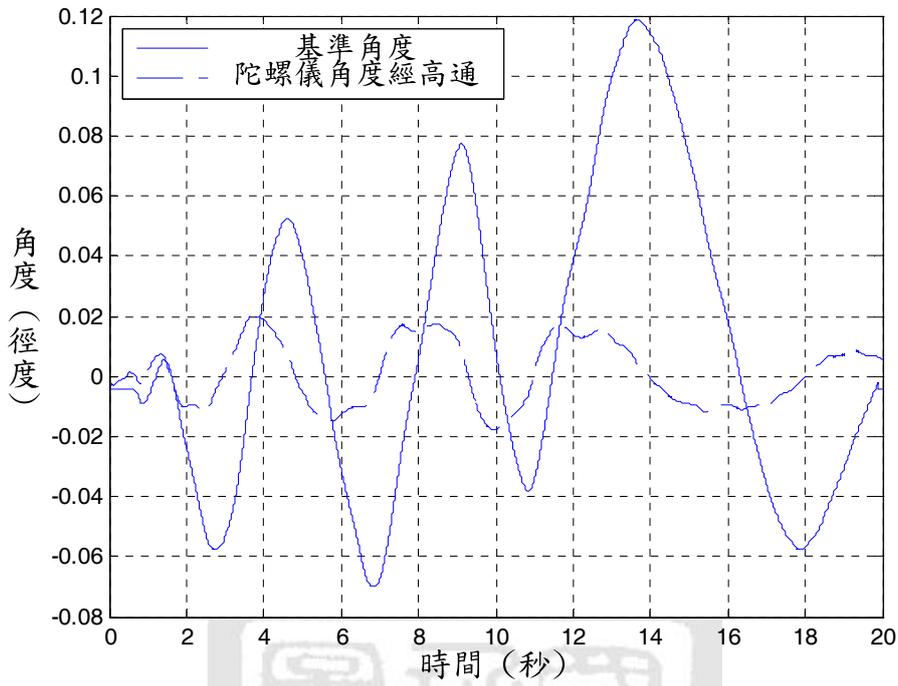


圖 8-22 陀螺儀 IDG-300 積分經高通濾波與基準角度比較圖

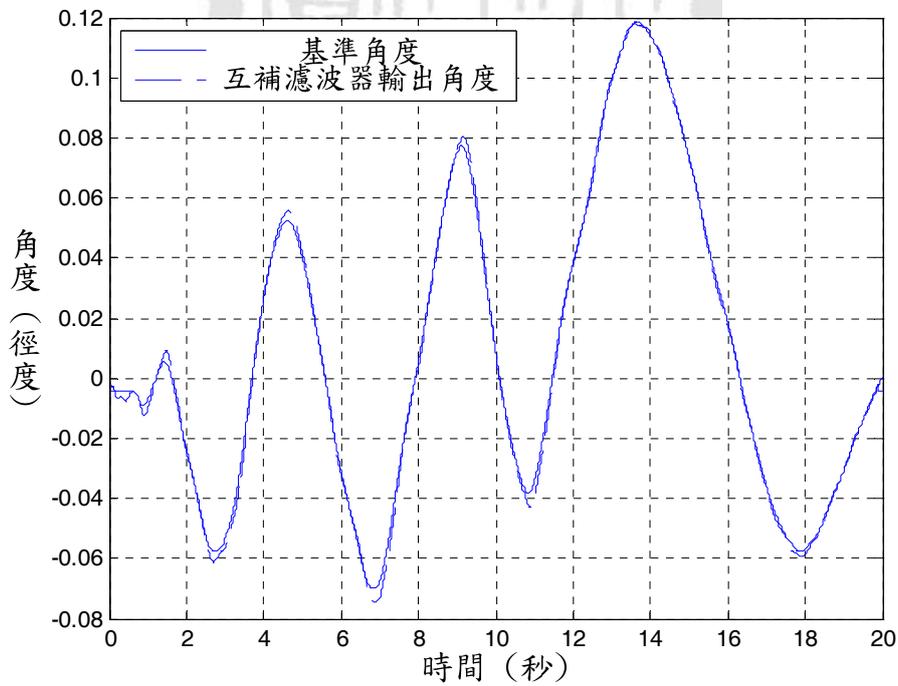


圖 8-23 訊號經互補濾波器角度與基準角度比較圖(IDG-300)

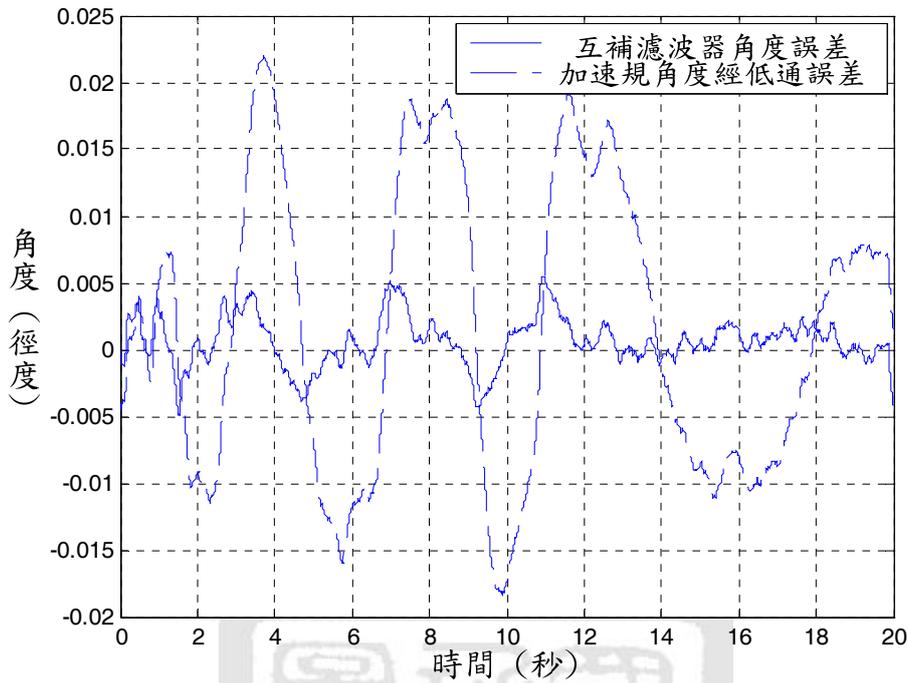


圖 8-24 互補濾波器誤差與加速規角度誤差比較圖(IDG-300)

接下來將使用加速規 ADXL330 搭配陀螺儀 ADXRS300 進行互補濾波器驗證。圖 8-25 為光學編碼器經移動平均濾波器之基準角度，圖 8-26 為實際加速規量測角度訊號，圖 8-27 為陀螺儀量測角速度訊號，由圖可知兩訊號均參雜嚴重雜訊，另外，由圖 8-28 可發現陀螺儀角速度訊號經積分後其訊號漂移嚴重。接下來將使用互補濾波器來改善角度訊號並與理想角度比較，首先由圖 8-29 至圖 8-31 的頻譜分佈圖，吾人設定截止頻率  $f_c$  大約為 2.5 Hz。

接下來對所量測訊號經濾波器處理並加以比較，由圖 8-32 加速規量測角度經低通濾波器後與基準角度比較，可看出角度訊號經低通濾波後的落後傾向。由圖 8-33 陀螺儀角速度訊號積分後經高通濾波器與基準角度比較，可看出經高通濾波器後，訊號振幅縮小失真。

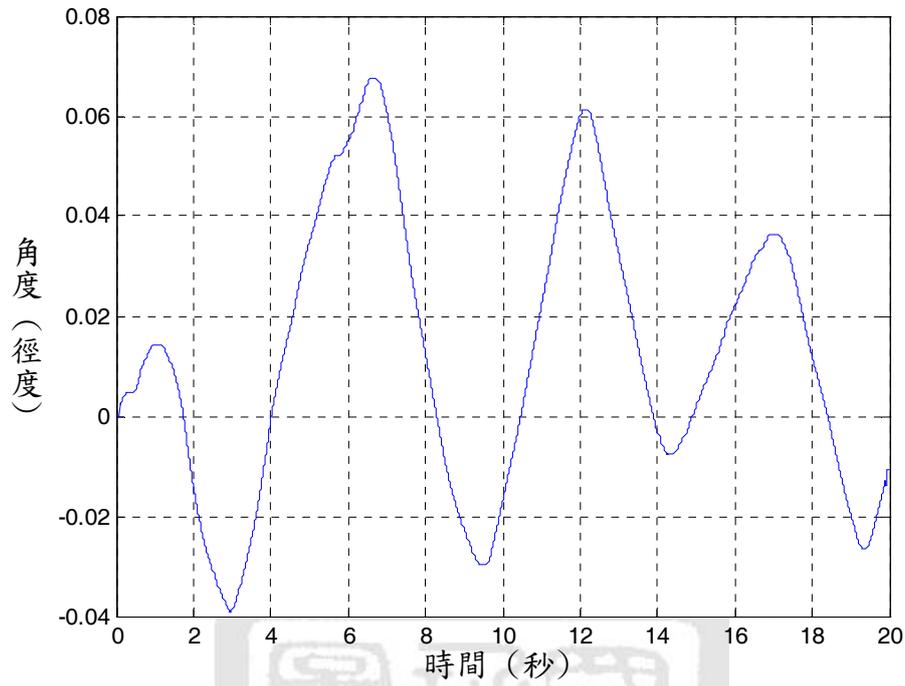


圖 8-25 光學編碼器量測角度經濾波訊號圖 (ADXRS300)

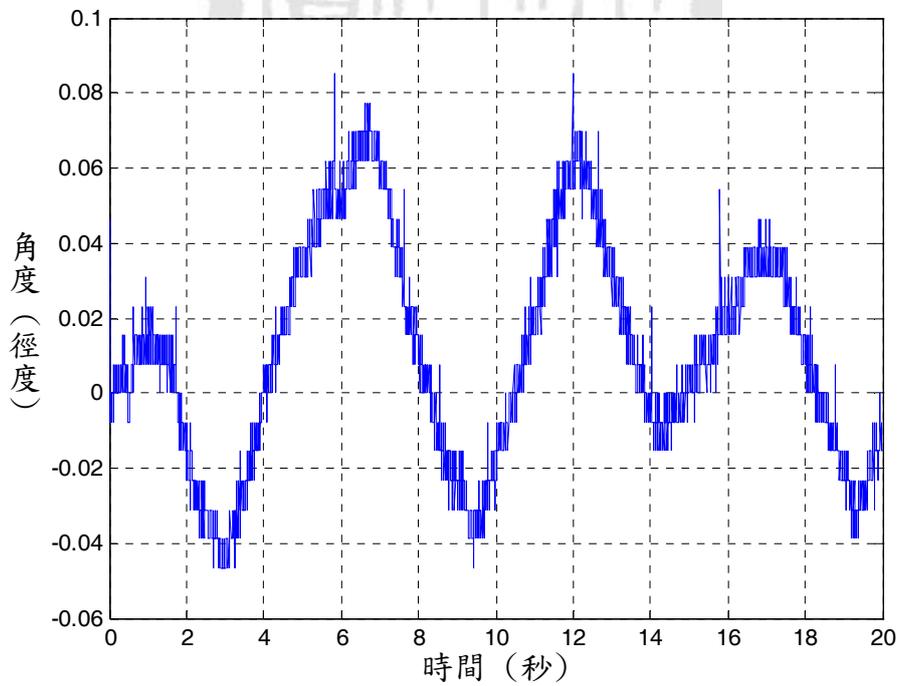


圖 8-26 實際加速規量測角度訊號圖 (ADXRS300)

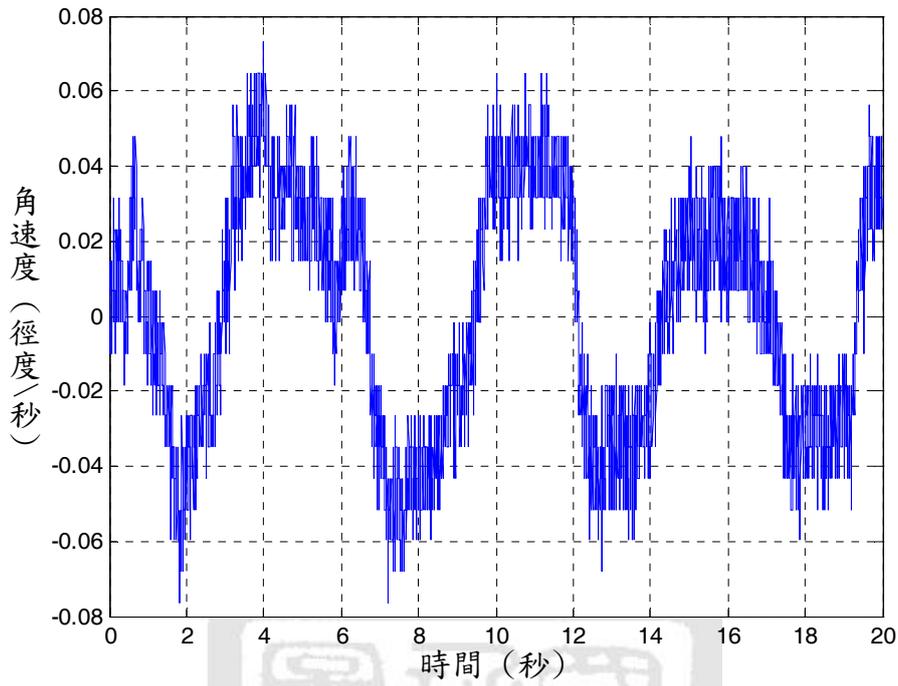


圖 8-27 實際陀螺儀 ADXR300 量測角速度圖

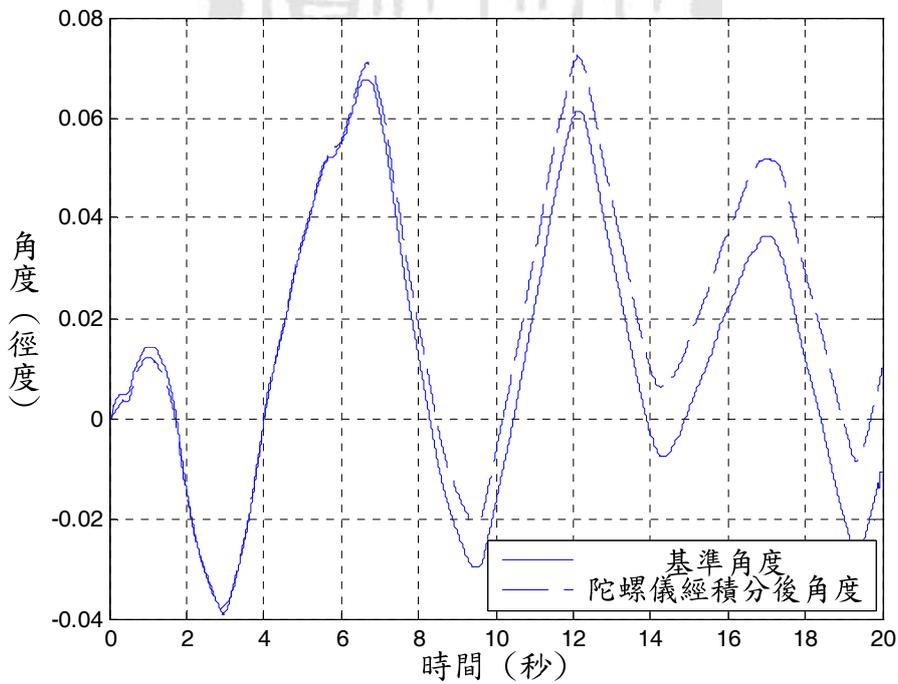


圖 8-28 陀螺儀 ADXR300 角速度經積分與基準角度比較圖

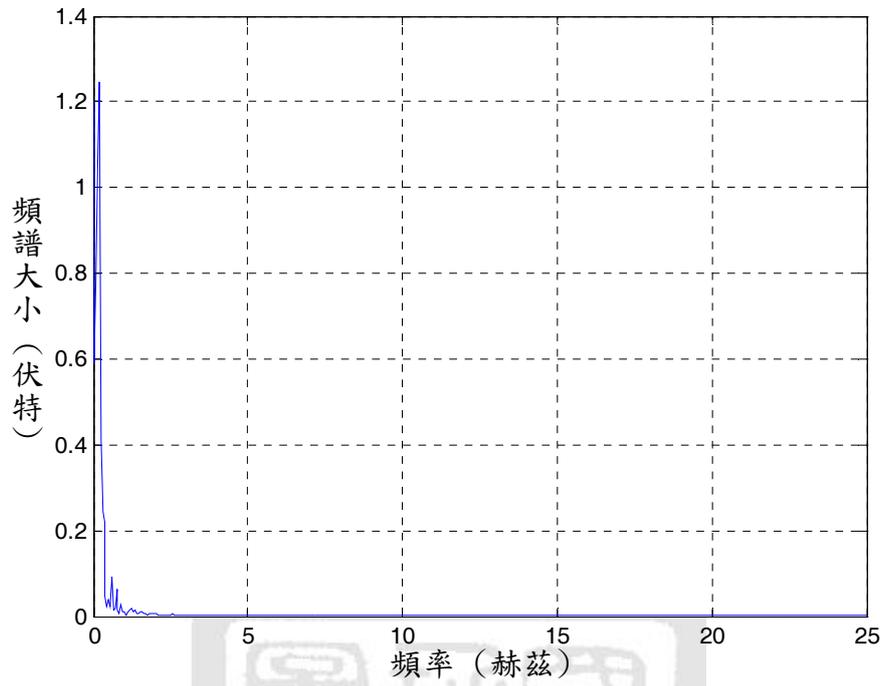


圖 8-29 光學編碼器角度頻譜(ADXRS300)

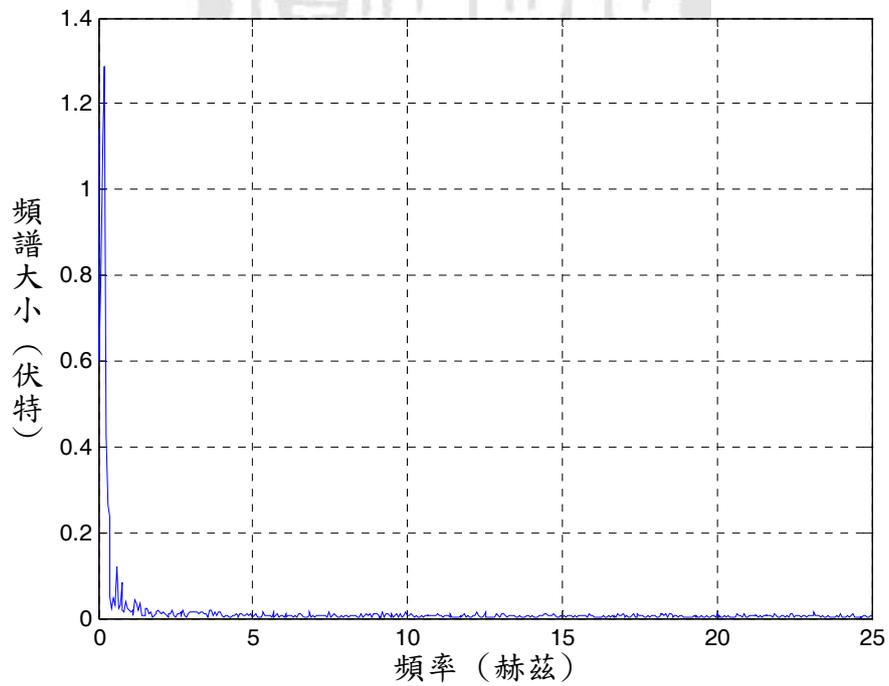


圖 8-30 加速規角度頻譜(ADXRS300)

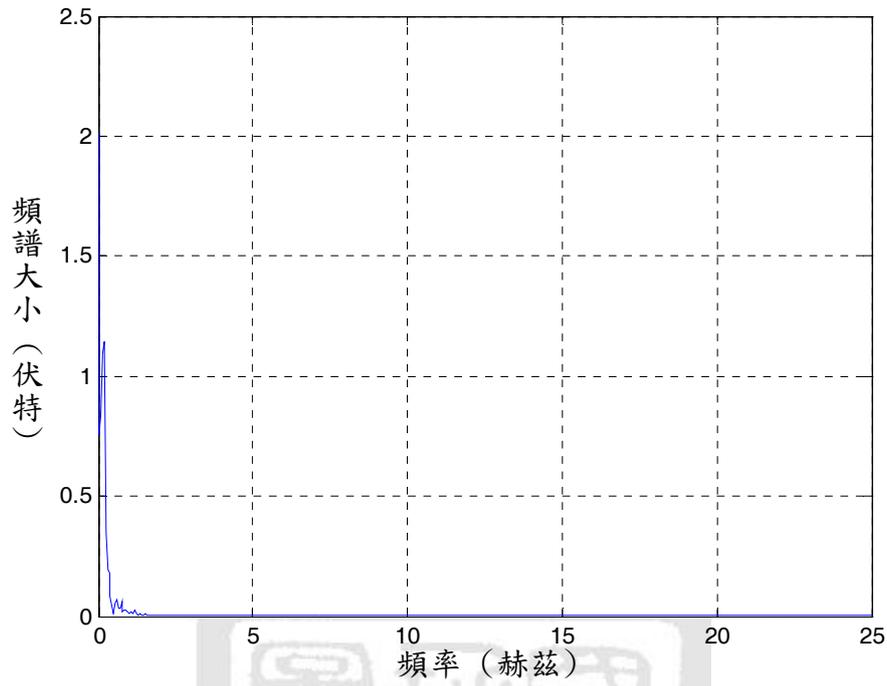


圖 8-31 陀螺儀積分角度頻譜(ADXRS300)

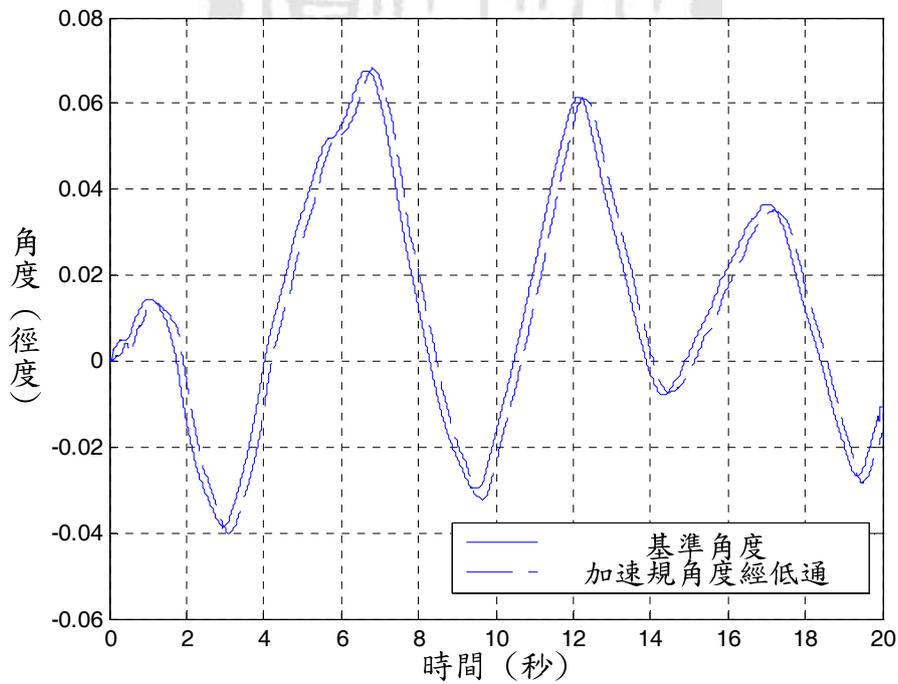


圖 8-32 加速規角度經低通濾波與基準角度比較圖(ADXRS300)

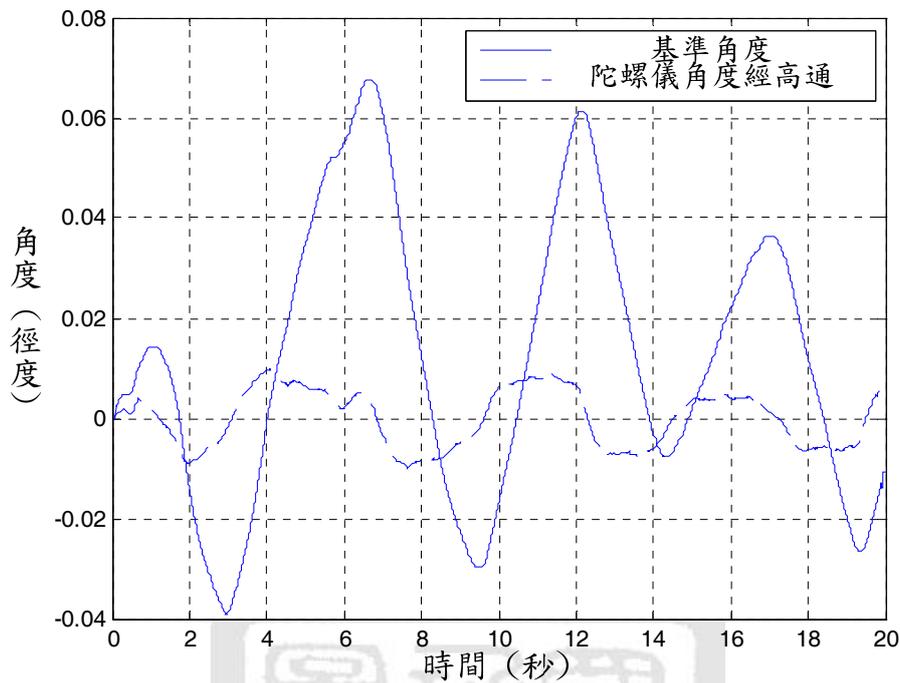


圖 8-33 陀螺儀 ADXRS300 積分經高通濾波與基準角度比較圖

由圖 8-34 互補濾波器處理之角度訊號與基準角度比較，可看出濾波訊號非常接近基準角度，故可驗證互補濾波器在此感測器組合之可行性。由圖 8-35 互補濾波器與基準角度誤差值與加速規角度訊號經低通濾波器後與基準角度誤差值比較圖可知互補濾波器優於單純使用加速規。

最後，因為以上實際感測器訊號的驗證實驗是以手動搖晃系統來進行量測，與實際系統平衡時的振動頻率會有不同，故吾人擷取實際系統平衡時，互補濾波器角度頻譜圖，以及系統平衡時未經濾波前加速規角度與陀螺儀積分後角度的頻譜圖，再度確認吾人所取用之截止頻率的可行性。圖 8-36、圖 8-37、圖 8-38，為前後傾角相關的頻譜分佈圖，圖 8-39、圖 8-40、圖 8-41，為左右傾角相關的頻譜分佈圖，由所以頻譜圖可發現，吾人選取之截止頻率在 2.5 Hz 左右是可以濾除陀螺儀積分後的低頻雜訊以及加速規的高頻雜訊。

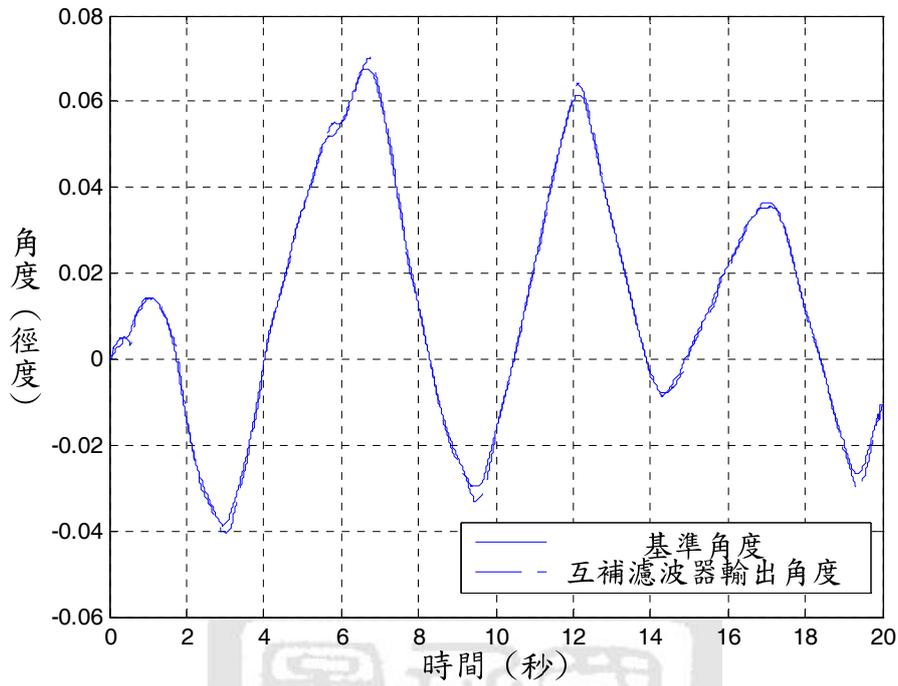


圖 8-34 訊號經互補濾波器角度與基準角度比較圖(ADXRS300)

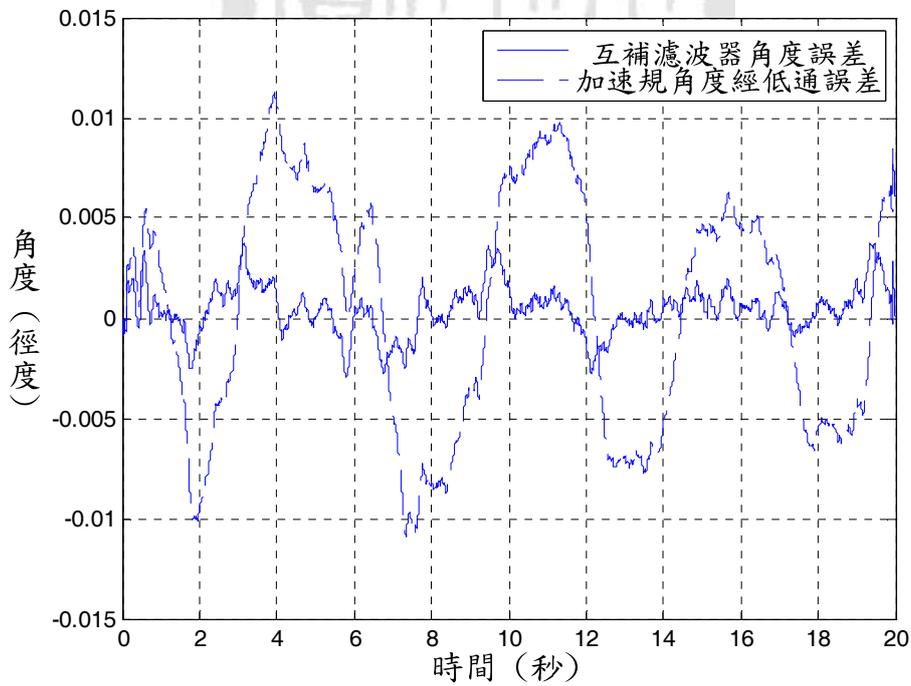


圖 8-35 互補濾波器誤差與加速規角度誤差比較圖(ADXRS300)

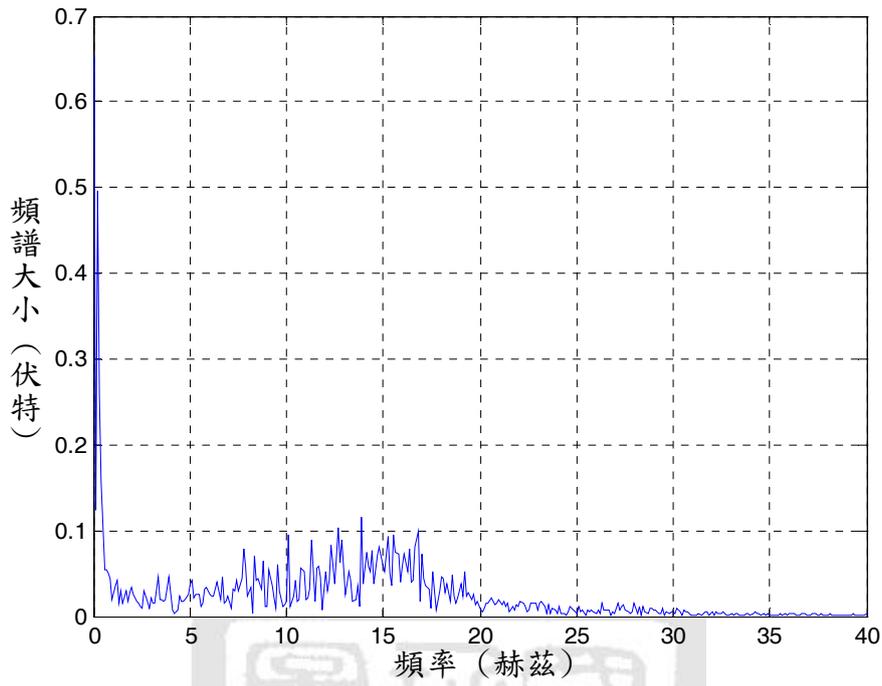


圖 8-36 互補濾波器輸出前後傾角頻譜

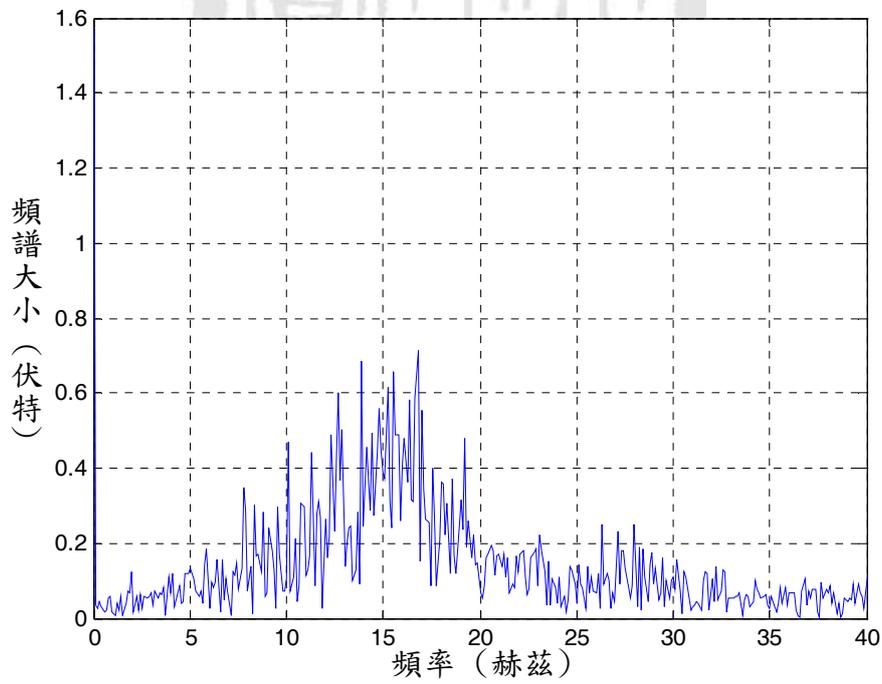


圖 8-37 加速規  $x$  軸角度頻譜

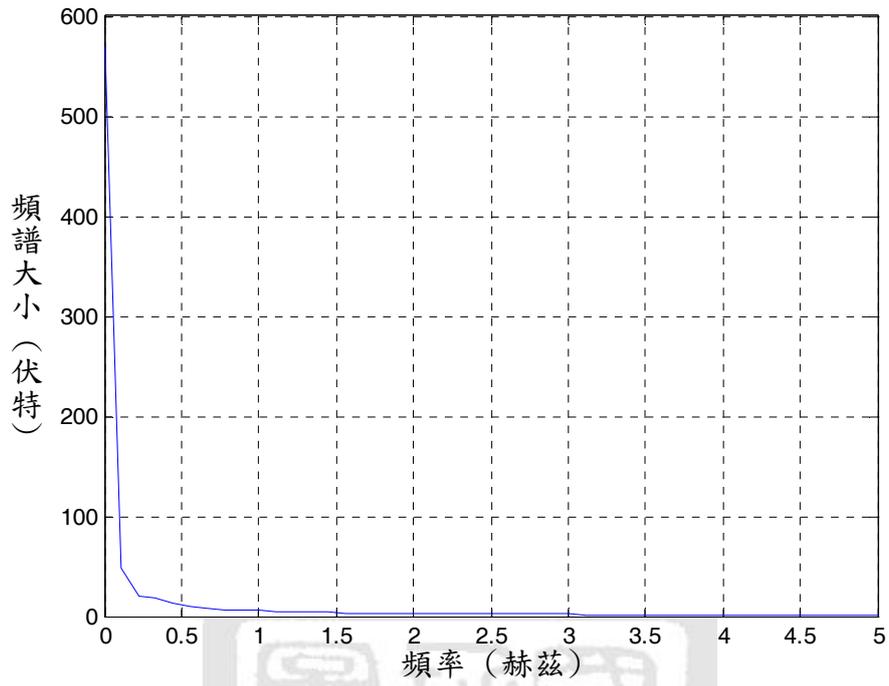


圖 8-38 陀螺儀 ADXRS300 積分角度頻譜

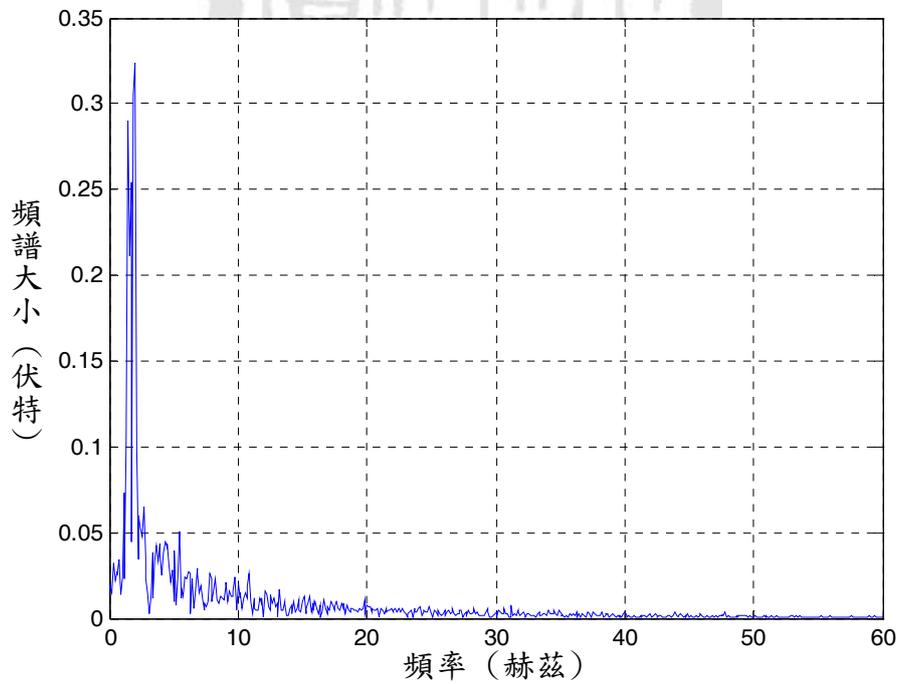


圖 8-39 互補濾波器輸出左右傾角頻譜

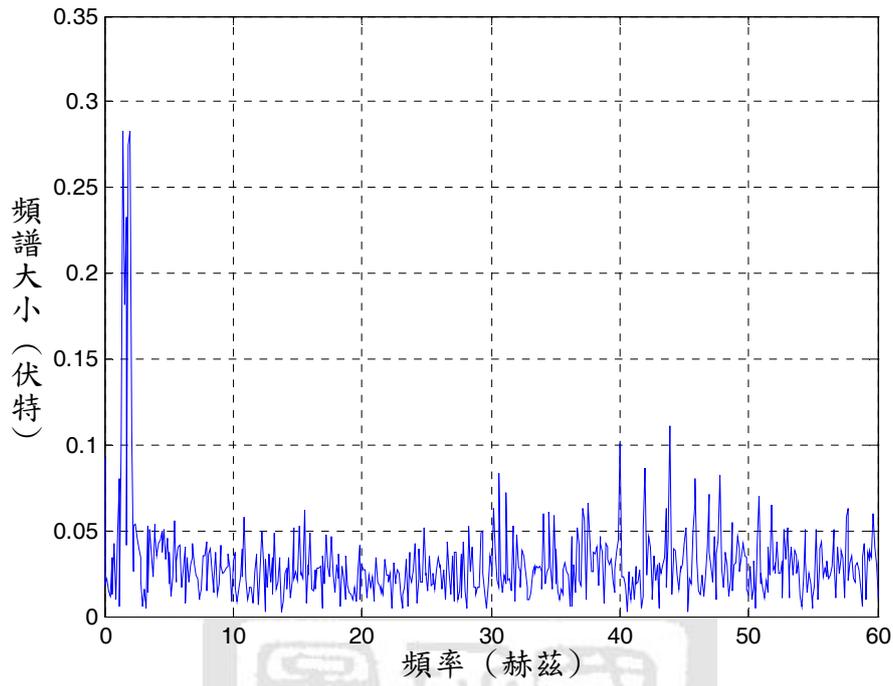


圖 8-40 加速規 y 軸角度頻譜

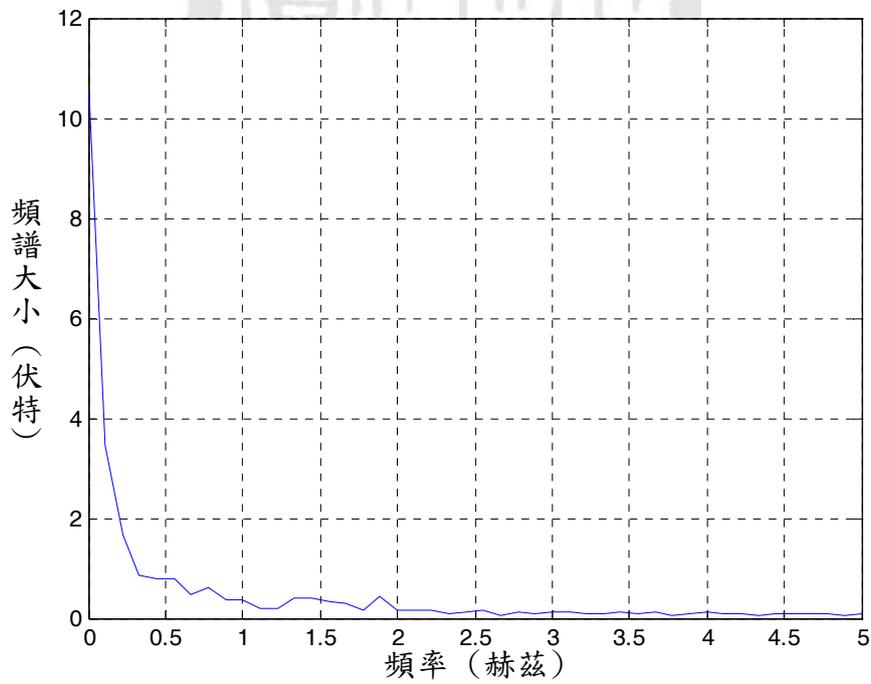


圖 8-41 陀螺儀 IDG-300 積分角度頻譜

## 第九章 實驗結果

### 9-1 前言

本論文以數位訊號處理器為控制核心，配合慣性量測元件以建構一單輪車系統，其整體系統架構如圖 9-1 所示。本章將對第五章所設計之單輪車平衡控制器進行實作驗證，而其控制參數乃參考第五章控制器設計所得。由於單輪車系統非線性項過於複雜且存在外在不確定因素的干擾下，在實際的平衡控制時，LQR 控制器會使得系統逐漸發散，故本論文採用全狀態回授線性化控制器以及順滑模態控制器來實現單輪車系統的平衡控制。本章內容包含：9-2 單輪車系統平衡控制實驗；9-3 實驗結論。

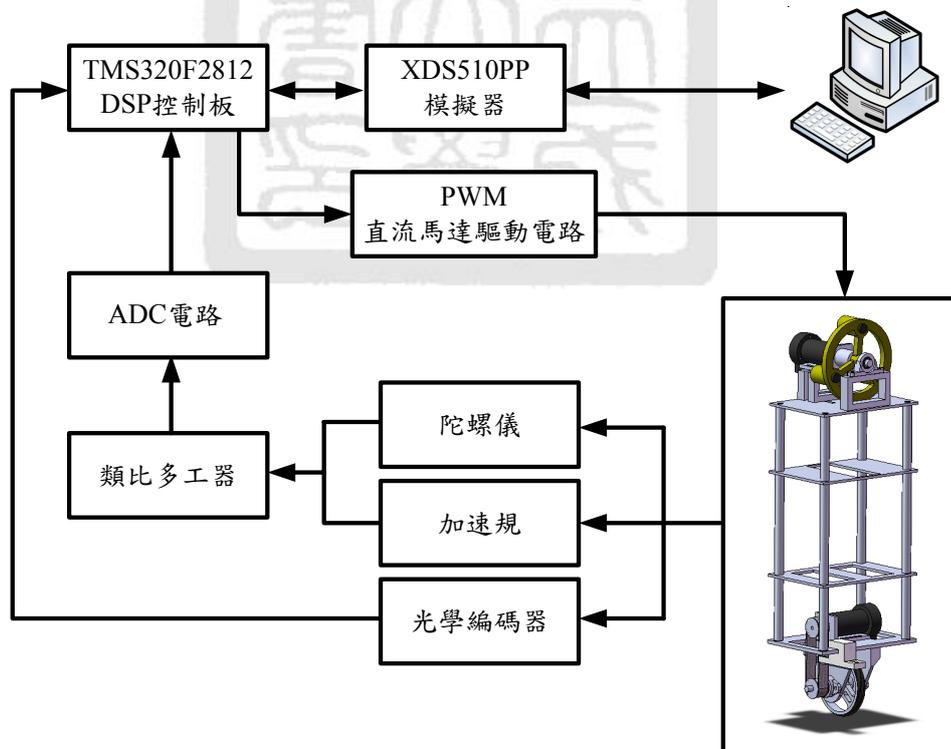


圖 9-1 單輪車整體系統架構方塊圖

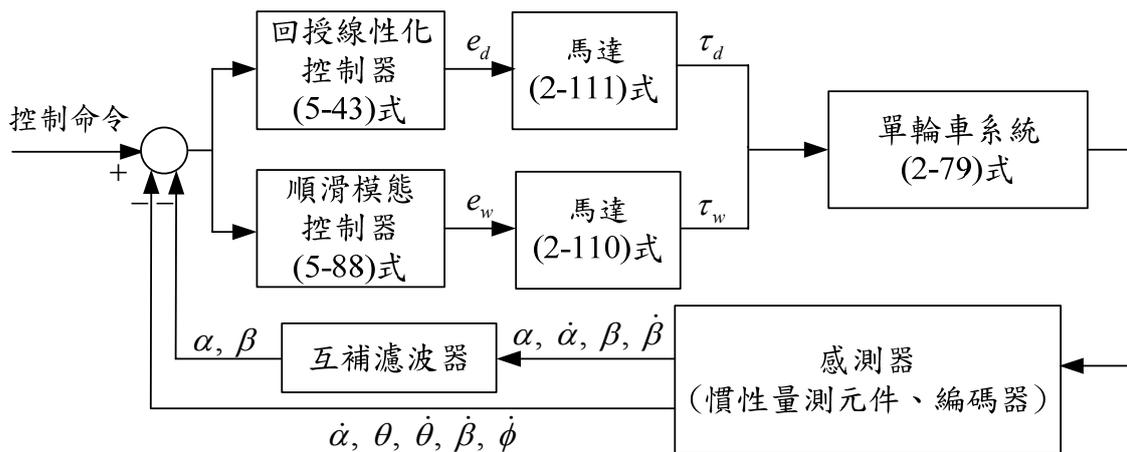


圖 9-2 單輪車整體系統控制方塊圖

## 9-2 單輪車系統平衡控制實驗

此章節將說明單輪車系統平衡實驗結果，單輪車系統為極度不穩定的系統，許多因素都將影響其實際平衡的情形，例如雜訊、機構重心、或地板的傾斜等等，均對系統平衡有一定的影響。實驗中吾人以回授線性化控制器來控制單輪車系統的左右平衡，以順滑模態控制器控制單輪車系統前後的平衡。接下來吾人將實作分為兩個部份，第一部份，吾人將系統姿態初始位置偏離平衡點後，再進行平衡，以觀察系統之暫態響應。在本論文實作中，吾人分別將系統的左右傾角以及前後傾角偏離平衡點，並觀察其平衡的暫態響應，以驗證實際系統上，控制器之性能。而因為在實際系統上，未送電給予控制力之前，車輪將任意的滑動，造成兩軸向同時偏離平衡點的初始狀態無法成功擺放，故論文中並無提供兩方向同時偏離平衡點之暫態響應實作結果。實作第二部份吾人於系統平衡時給予推力擾動，以觀察其強健性。

首先為前後方向偏離平衡點較多，而左右方向幾乎無偏離平衡點的

平衡狀況。實驗中吾人給予前後傾角初始值約為 0.06 徑度，而左右傾角初始值約為 0.005 徑度。由圖 9-3 單輪車系統前後傾角實作響應圖可看出，角度快速收斂並約於  $\pm 0.03$  徑度間來回擺盪，由圖 9-4 車輪角度實作響應圖可看出車輪為了系統的平衡而前後移動，並可看出車輪因為一開始系統向前傾倒而向前移動，最後慢慢回到平衡點附近來回移動。圖 9-5 為車輪控制電壓響應圖，由圖可看出電壓一開始因系統偏離平衡點而產生較大控制力，其於皆在  $\pm 8$  V 跳動，並未達飽和電壓。圖 9-6 為單輪車系統左右傾角實作響應圖，由圖可看出除了在外在因素的干擾下有較大擺幅外，左右傾角大致於  $\pm 0.02$  徑度間擺盪，由圖 9-7 為轉盤速度實作響應圖可看出轉盤為達到左右平衡而不停地左右轉動。圖 9-8 為單輪車系統轉盤控制電壓圖，由圖可看出，除了在外在因素影響或錯誤角度訊號干擾下有短暫的電壓飽和現象以外，其餘均屬正常工作電壓範圍。

接下來將左右方向偏離平衡點較多，而前後方向幾乎無偏離平衡點的平衡狀況。實驗中左右傾角初始值約 0.04 徑度，而前後傾角初始值約 -0.003 徑度。由圖 9-9 單輪車前後傾角響應圖可看出，除了外在因素干擾時有較大的擺幅外，大致角度約於  $\pm 0.03$  徑度間來回擺盪，由圖 9-10 車輪角度響應圖可看出車輪為了系統的平衡而於平衡點附近來回移動。由圖 9-11 車輪控制電壓圖可看出控制電壓未飽和。圖 9-12 為單輪車系統左右傾角響應圖可看出左右傾角大約放置偏離平衡點 0.04 徑度，送電後由於瞬間啟動時加速度無法達到預期，使得角度稍微再偏離平衡點一些後隨即慢慢收斂於平衡點，並大致於  $\pm 0.02$  徑度間擺盪，由圖 9-13 轉盤角速度響應圖可知轉盤速度因一開始系統偏離平衡點而快速轉動，並在系統穩定後，緩慢的降低速度，由圖 9-14 轉盤控制電壓圖可看出除了因為系統一開始偏離平衡點，而呈現飽和 18 V 外，在穩態下皆未飽和。

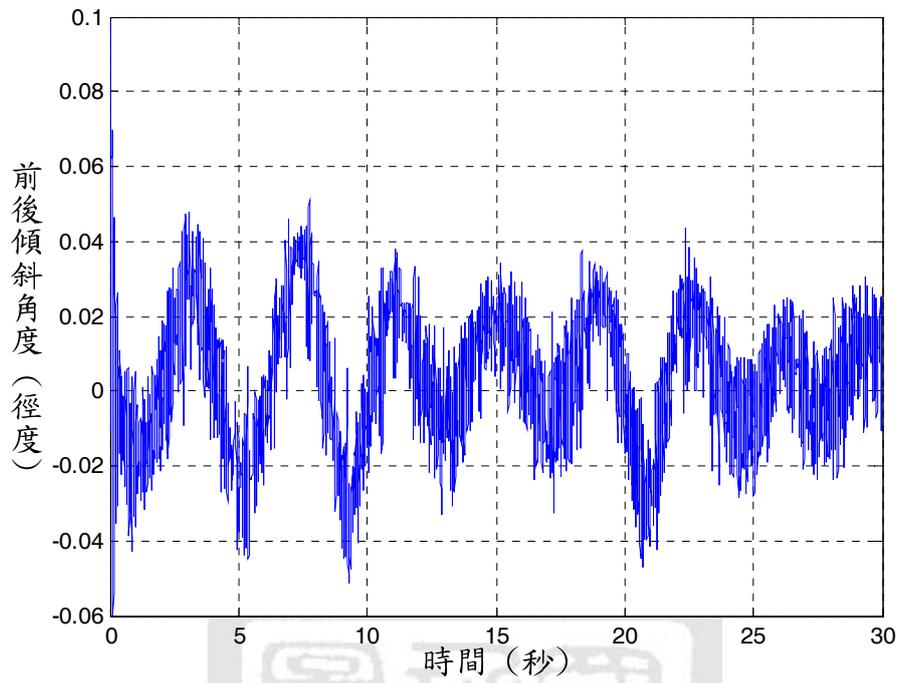


圖 9-3 單輪車系統前後傾角實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ )

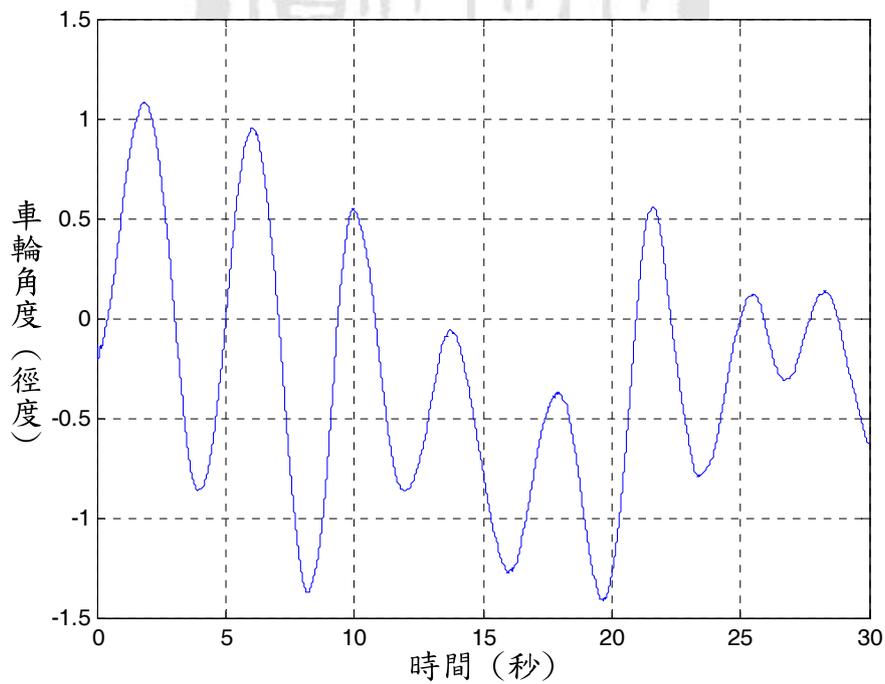


圖 9-4 單輪車系統車輪角度實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ )

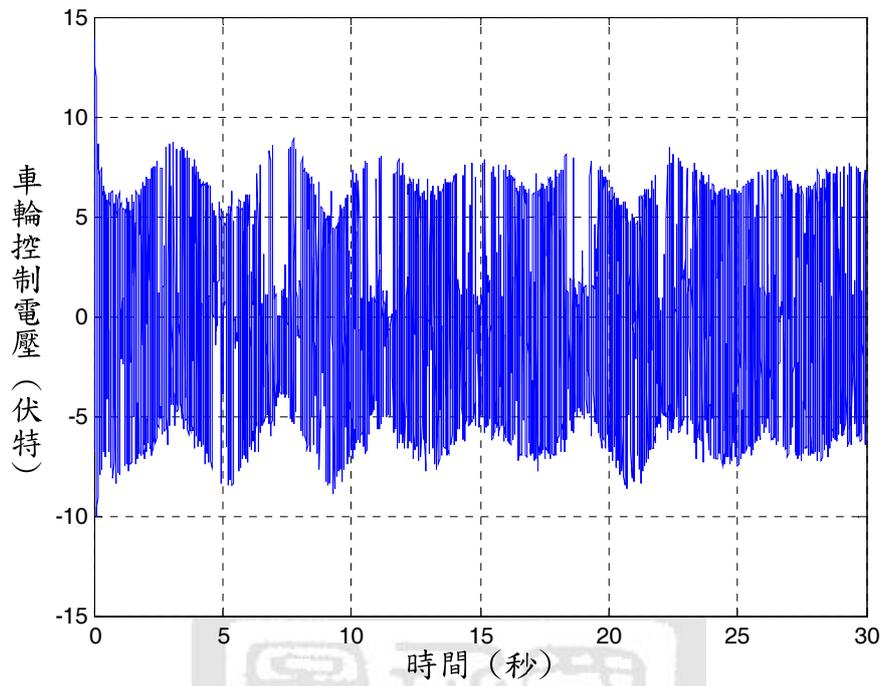


圖 9-5 單輪車系統車輪控制電壓實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ )

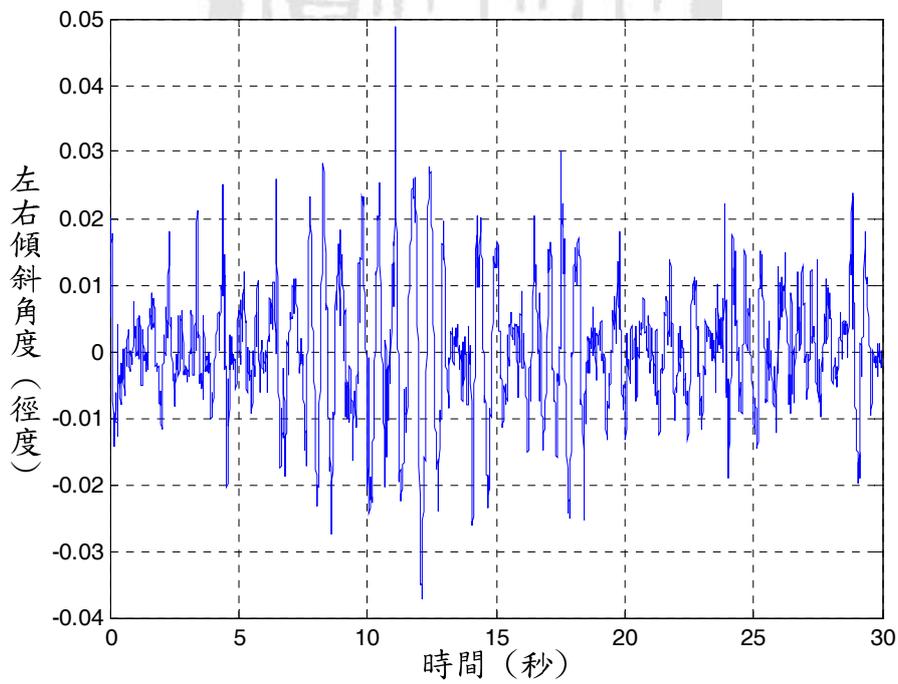


圖 9-6 單輪車系統左右傾角實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ )

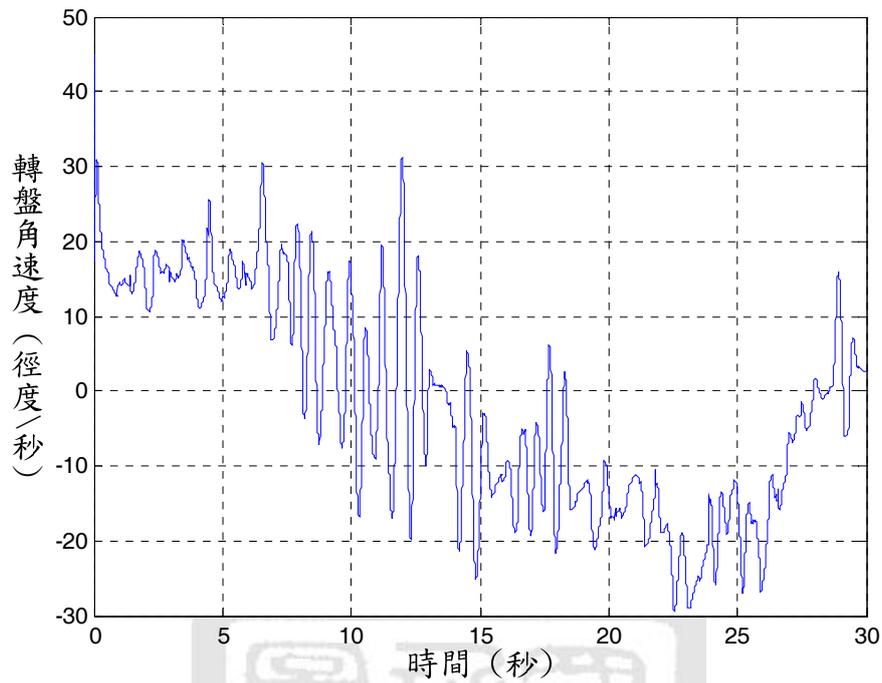


圖 9-7 單輪車系統轉盤角速度實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ )

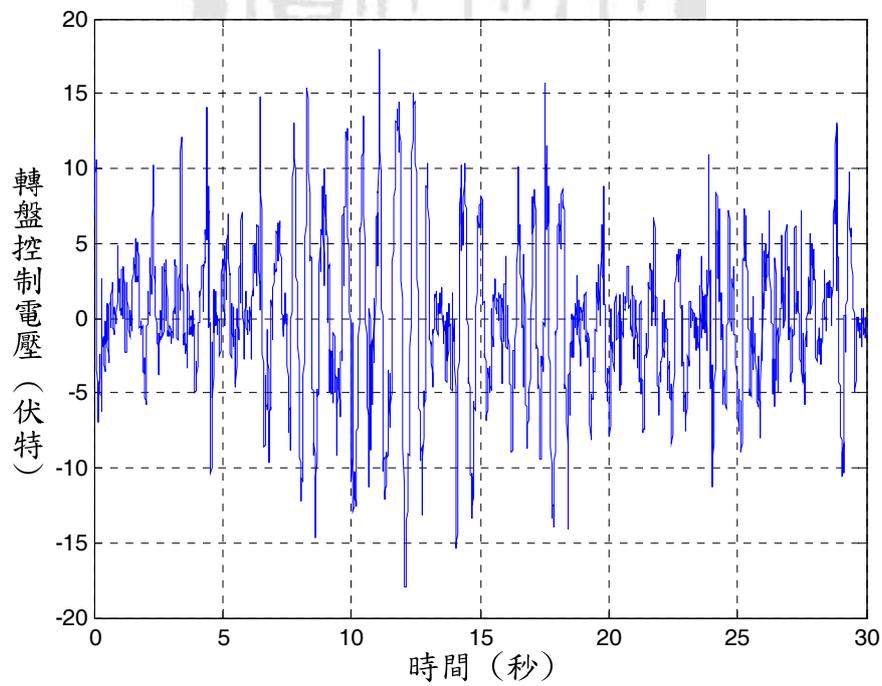


圖 9-8 單輪車系統轉盤控制電壓實作響應圖 ( $\alpha(0) = 0.06, \beta(0) = 0.005$ )

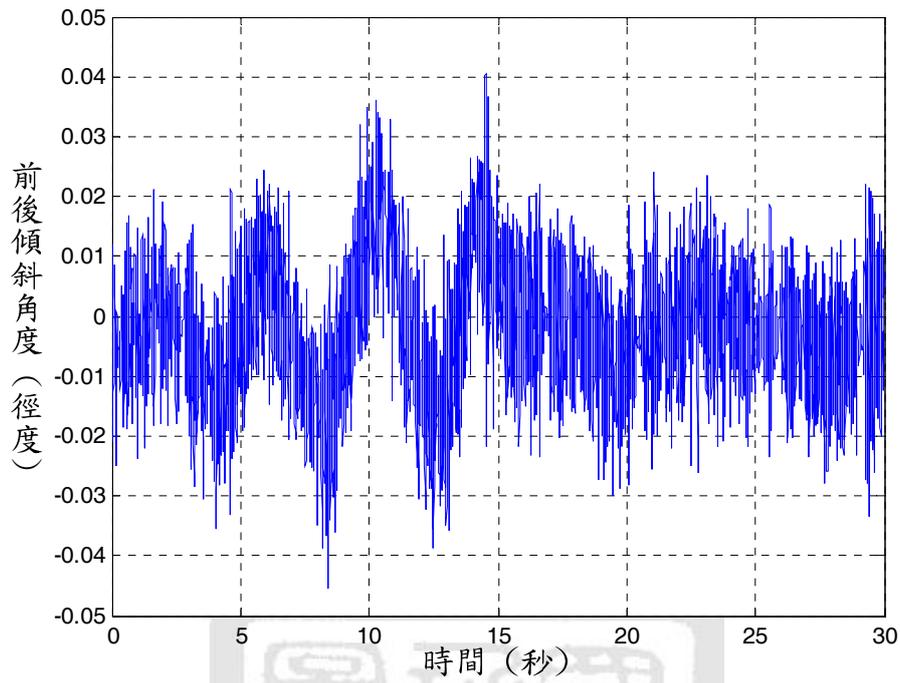


圖 9-9 單輪車系統前後傾角實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ )

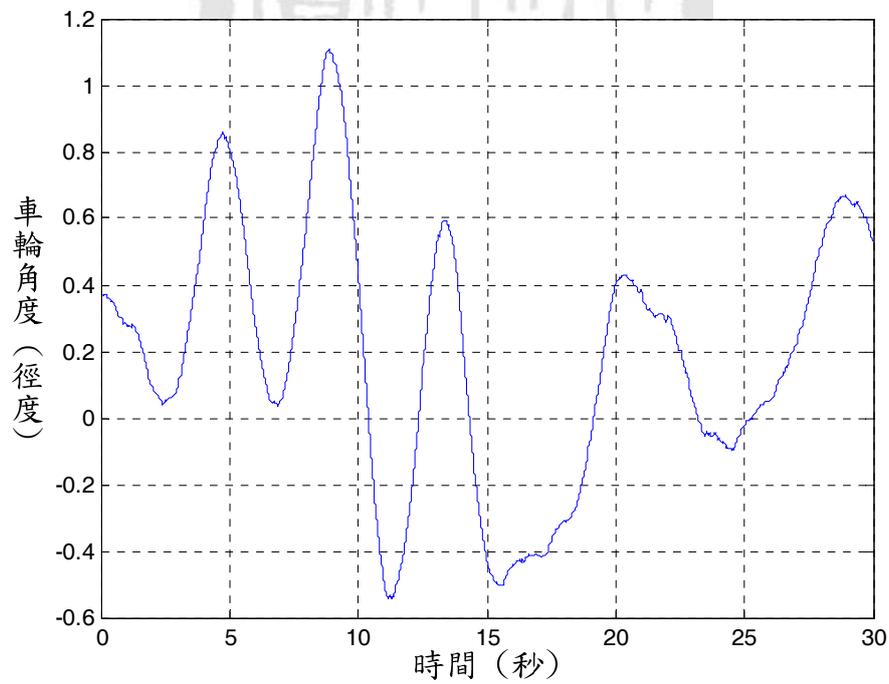


圖 9-10 單輪車系統車輪角度實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ )

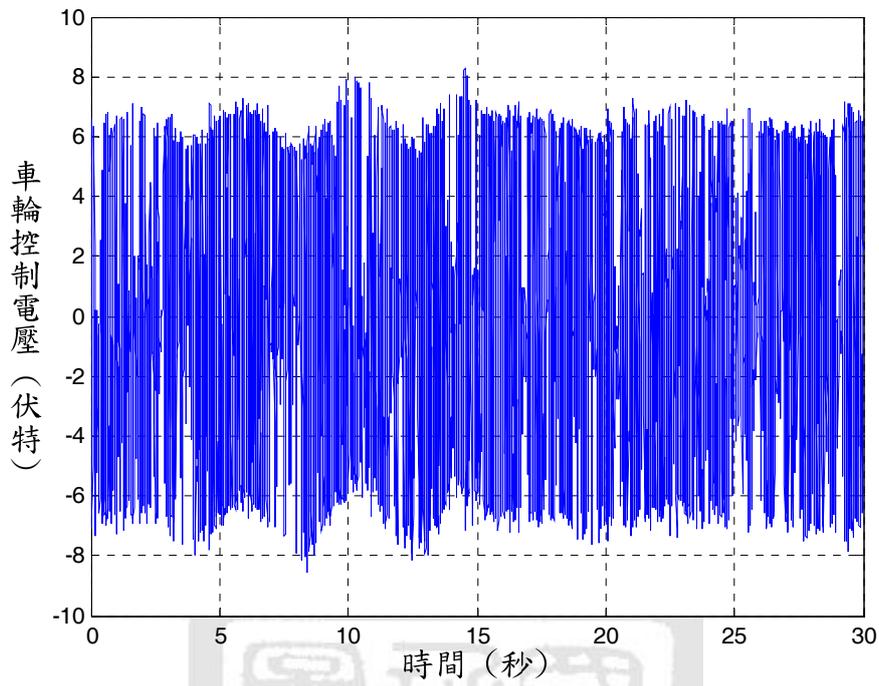


圖 9-11 單輪車系統車輪控制電壓實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ )

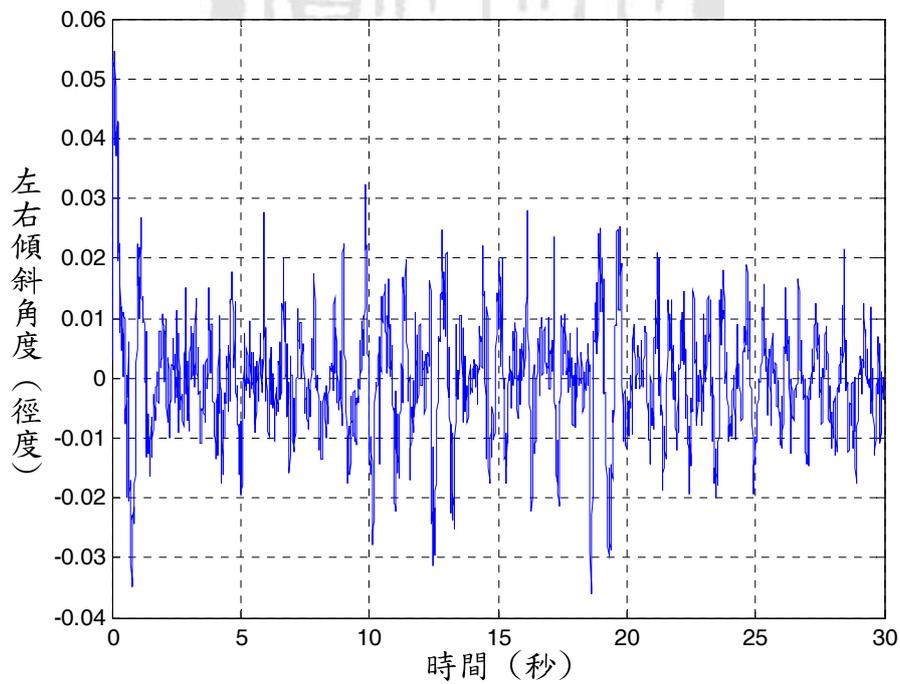


圖 9-12 單輪車系統左右傾角實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ )

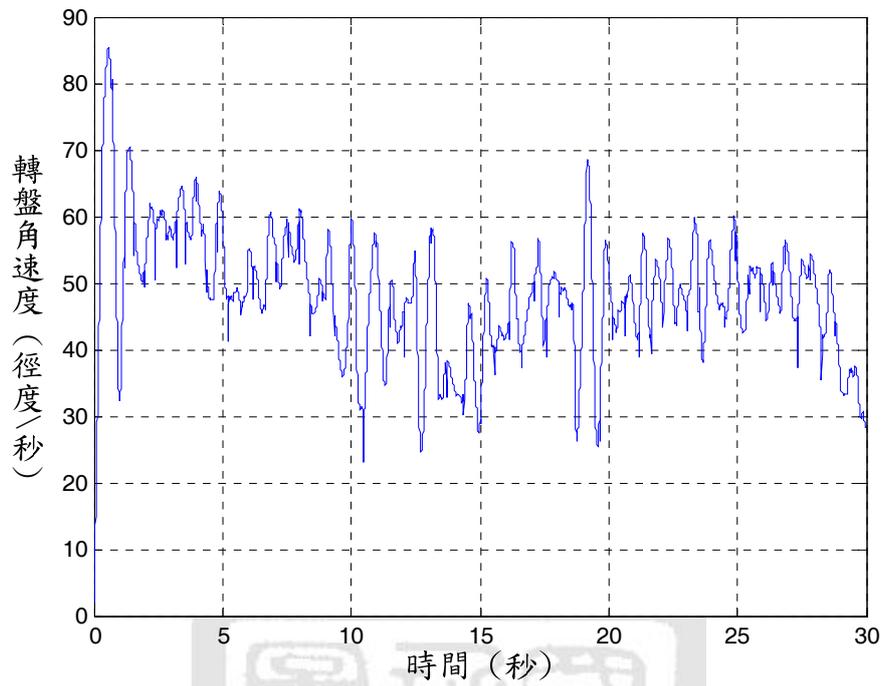


圖 9-13 單輪車系統轉盤角速度實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ )

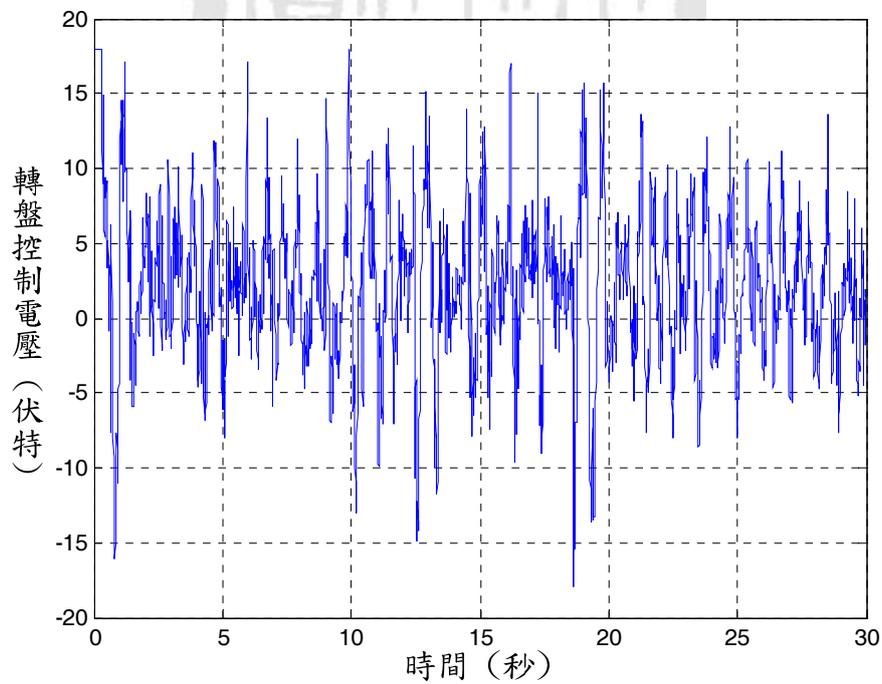


圖 9-14 單輪車系統轉盤控制電壓實作響應圖 ( $\alpha(0) = -0.003, \beta(0) = 0.04$ )

為了驗證系統之強健性，吾人將對平衡中的單輪車系統進行擾動實驗，實驗中吾人大約在 7.5 秒左右給予一向前推擾動，並在 14 秒左右給予一向右推擾動，並觀察系統響應。

由圖 9-15 擾動下單輪車系統前後傾角響應圖，可看出系統於 7.5 秒的擾動後快速地收斂，但由於 14 秒左右的右推擾動使得系統轉盤為了維持平衡而持續轉動，連帶使得前後平衡受到干擾，故 15~25 秒之間振幅較大，但最後依舊可以維持前後的穩定，圖 9-16 為擾動下單輪車系統車輪角度響應圖，由此響應圖可看出車輪於 7.5 秒前移動速度慢，擾動後移動加快，並在 15~25 秒前後傾角較大的時候移動範圍較大，圖 9-17 為擾動下單輪車系統車輪控制電壓響應圖，由此響應圖可看出在給予前推力擾動時，控制電壓較大，但均未達飽和電壓，由上述結果可知吾人所設計之順滑模態控制器具有良好的強健性。

由圖 9-18 擾動下單輪車系統左右傾角響應圖可看出角度在 7.5 秒的前推擾動下，出現了突波，此突波為感測器受干擾而出現之錯誤角度，在實際系統上並無如此大的偏擺角度，而在 14 秒給予單輪車一右推擾動後，可看到系統左右傾角被推離平衡點約 0.05 徑度後，迅速往回擺動且趨於穩定，由圖 9-19 擾動下單輪車系統轉盤角速度響應圖可看出轉盤在 14 秒的右推擾動後，轉盤為了維持系統平衡，由原本向左轉動迅速變為向右轉動，並在系統穩定後，慢慢降低速度，由圖 9-20 擾動下單輪車系統轉盤控制電壓響應圖可看出在 14 秒左右的擾動後，控制電壓呈現短暫飽和電壓 -18 V 的狀態，其餘在穩定平衡的情況下皆屬正常電壓範圍或是極短暫的飽和電壓。由上述結果可驗證吾人所設計之回授線性化控制器其控制強健性。

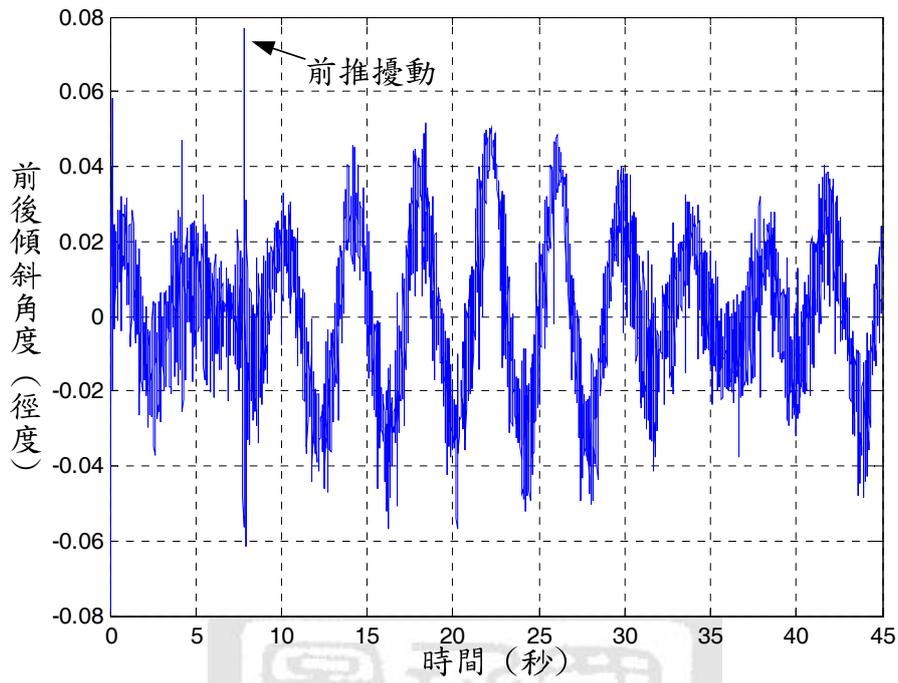


圖 9-15 擾動下單輪車系統前後傾角響應圖

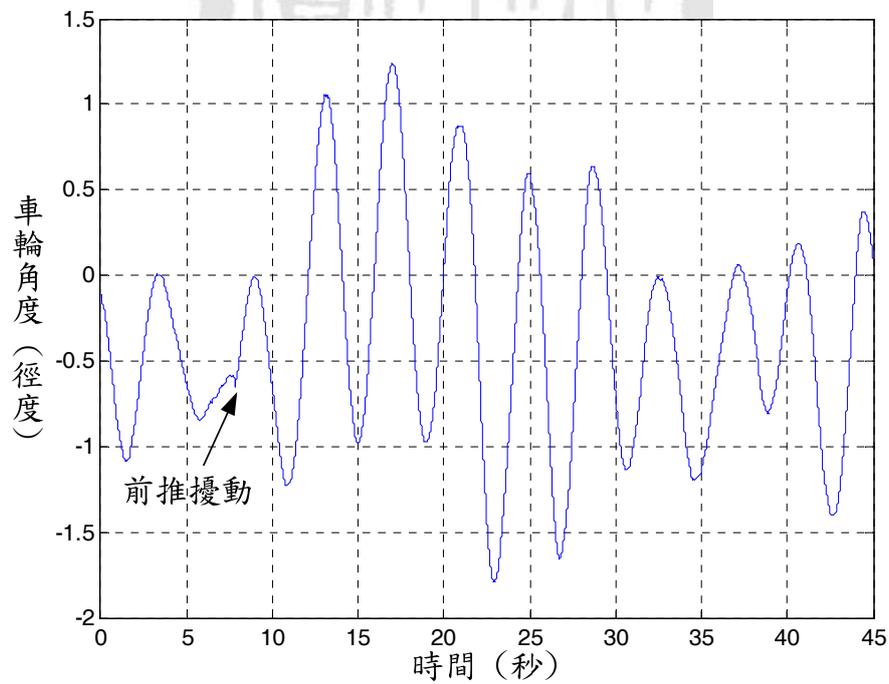


圖 9-16 擾動下單輪車系統車輪角度響應圖

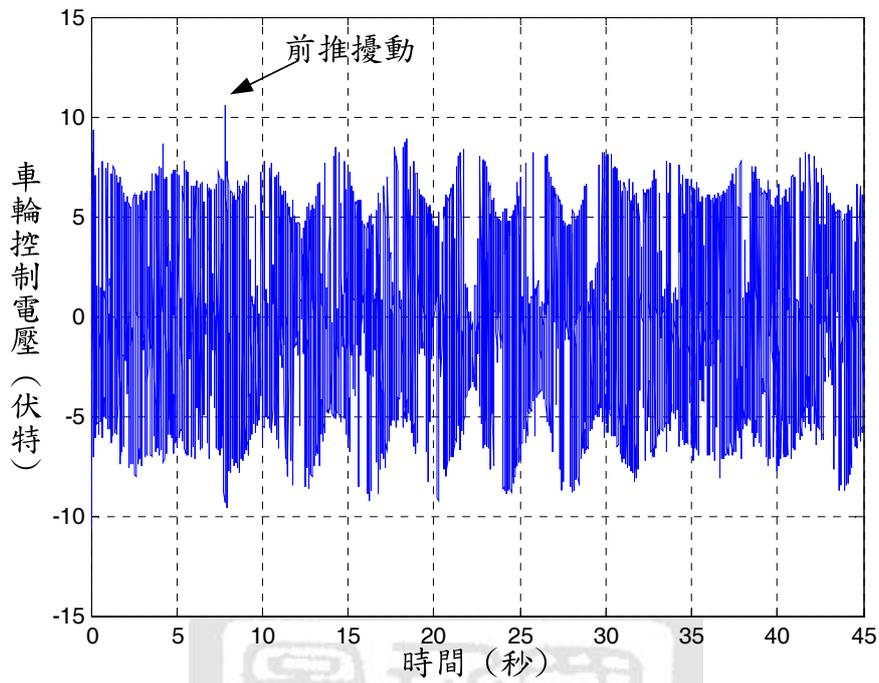


圖 9-17 擾動下單輪車系統車輪控制電壓響應圖

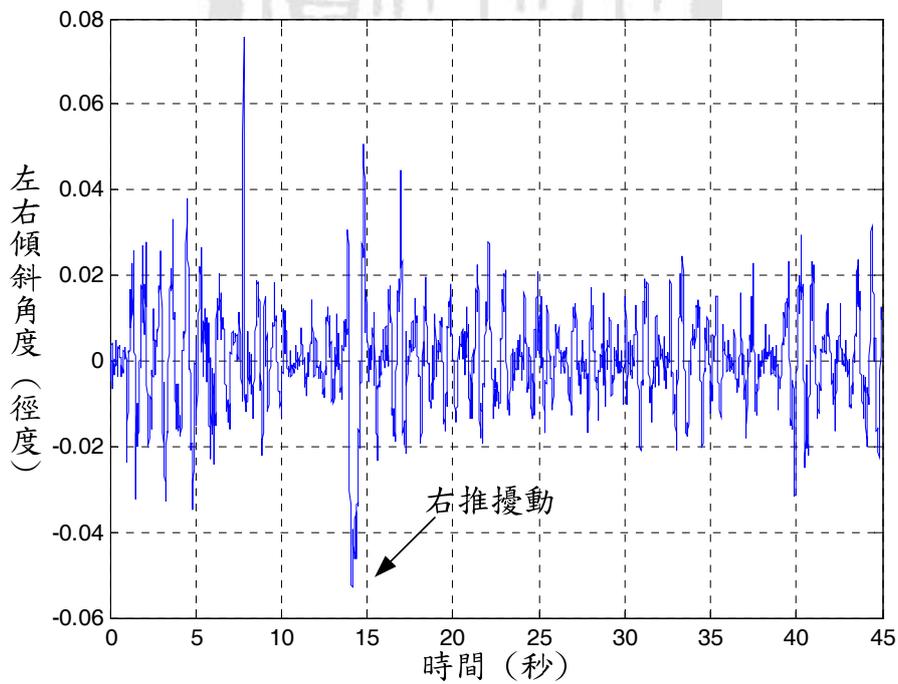


圖 9-18 擾動下單輪車系統左右傾角響應圖

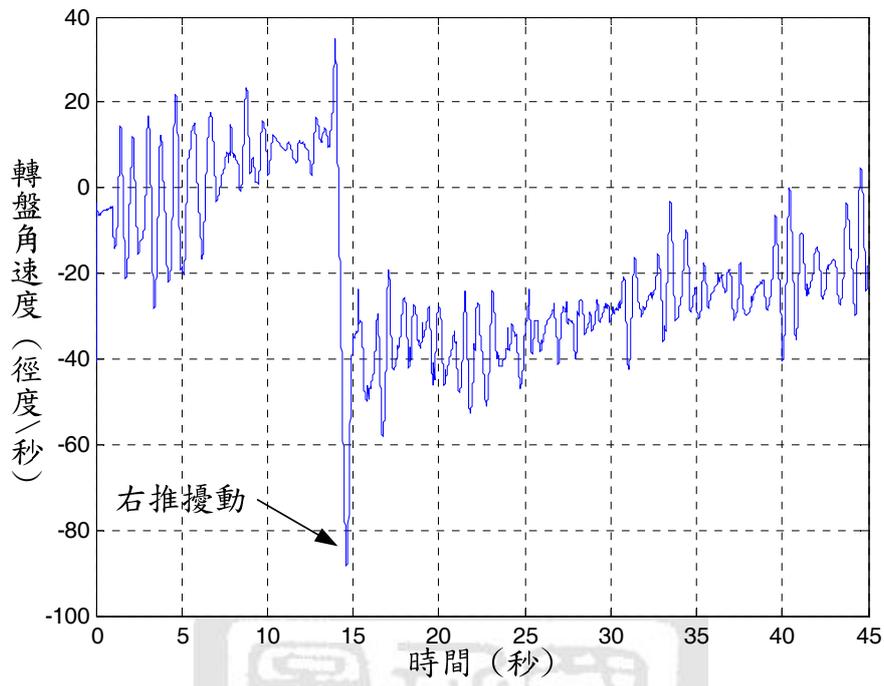


圖 9-19 擾動下單輪車系統轉盤角速度響應圖

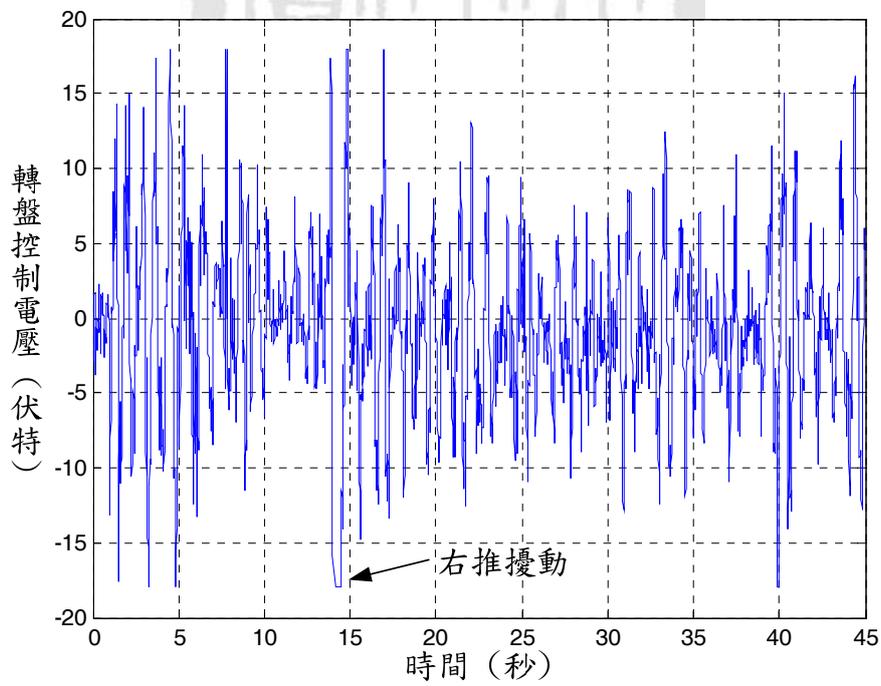


圖 9-20 擾動下單輪車系統轉盤控制電壓響應圖

### 9-3 實驗結論

在本章吾人完成了單輪車系統的平衡控制，並驗證其強健性，觀察所有的實驗結果，單輪車前後傾角收斂快速，此現象與模擬時相符合，左右傾角的部分一旦偏離平衡點較多時，控制電壓就會飽和，此現象也與模擬相似，另外，實作的過程中，發現 LQR 控制器無法使系統穩定收斂，故也證實 LQR 控制器性能較差。在實作的過程中，吾人也發現，單輪車系統在移動的情形下，的確是有助於左右的平衡控制，而系統有左右傾倒的情況下配合前後移動時，系統的偏向角度的確會改變，此現象也與模擬相符。另外，在單輪車的平衡控制中，機構的重心、配重以及地面的傾斜等，均會影響其平衡的狀態，而且前後平衡控制以及左右平衡控制之間運作時的震動也會互相影響彼此的平衡，由此也可發現單輪車系統控制之困難度。

## 第十章 結論與未來展望

### 10-1 結論

在本論文中，吾人主要研究為設計並實現單輪車系統，並對其設計平衡控制器以達到平衡控制之目的。研究中，吾人先依單輪車系統的物理特性利用 Euler-Lagrangian Method 以及座標軸轉換的概念求得系統的動態數學模型，並對結合直流馬達系統識別(system identification)後所得之完整單輪車系統數學模型進行 LQR 控制器與回授線性化控制器以及順滑模態控制器之設計，再利用 Simulink 做系統模擬以驗證其可行性，並對模擬結果進行比較。吾人由模擬結果發現在前後平衡控制上以順滑模態控制器優於 LQR 控制器，在左右平衡控制上以回授線性化控制器亦優於單純使用 LQR 控制器。在感測器訊號處理上，吾人採用互補濾波器以取得較佳之回授訊號，並實際驗證其可行性。最後以數位訊號處理器 (TMS320F2812) 為基礎，並配合吾人自行設計之周邊電路以及利用 C 語言撰寫實現互補濾波器和平衡控制器，並驗證系統正確性。經實驗驗證，性能較差之 LQR 控制器在實作上並無法使系統穩定平衡，而以回授線性化控制器以及順滑模態控制器搭配互補濾波器的應用，可使得單輪車系統成功地達到平衡控制。

### 10-2 未來展望

在論文的研究過程中，吾人發現感測器之精良對系統具有相當的影響，不管是訊號雜訊所造成的震動，或解析度不佳所造成的系統不穩定等，因此在未來的研究上，可選用穩定性及抗雜訊較佳之類比感測器或

取樣頻率較高之數位感測器以提升系統穩定性。

本論文成功實現單輪車系統的平衡控制，在未來的研究上，可依本論文理論及經驗為基礎，發展更具挑戰性的單輪車軌跡追蹤控制，但由於單輪車極度不穩定的特性，使得軌跡追蹤控制更顯困難。



## 參考文獻

- [1] 村田網站 [http://www.murata.com/new/news\\_release/2008/0923.html](http://www.murata.com/new/news_release/2008/0923.html)
- [2] 本田網站 <http://world.honda.com/U3-X/>
- [3] eniCycle 網站 <http://enicycle.com/author.html>
- [4] 翁義清，「全向移動機器人之路徑追蹤控制」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十六年。
- [5] 徐嘉明，「以視覺伺服為基礎之全向移動機器人追蹤控制」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十六年。
- [6] 顏忠逸，「即時物體追蹤之立體視覺導引全向移動機器人研製」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十八年。
- [7] 洪聆剛，「兩輪倒單擺機器人平衡控制」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十九年。
- [8] D. V. Zenkov, A. M. Bloch, and J. E. Marsden, “The Lyapunov-Malkin Theorem and Stabilization of the Unicycle with Rider,” *Systems and Control Letters*, Vol. 45, No. 4, pp.293-302, 2002.
- [9] 藤川明洋，「自律走行型一輪車ロボットの開発」，智能機械システム工学科卒業論文，2003.
- [10] S. Usui, S. Kamoshita, and Y. Nagata, “Postural Stabilization of a Unicycle,” *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, PartC*, Vol. 62, No. 600, pp. 3124-3131, 1996.
- [11] Z. Sheng, K. Yamafuji, and S. V. Ulyanov, “Study on the Stability and Motion Control of a Unicycle,” *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C*

*Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, PartC*, Vol. 61, No. 583, pp. 306-313, 1995.

- [12] Z. Sheng and K. Yamafuji, "Postural Stability of a Human Riding a Unicycle and Its Emulation by a Robot," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 13, No. 5, pp.709-720, 1997.
- [13] S. Majima and T. Kasai, "A Controller for Changing the Yaw Direction of an Underactuated Unicycle Robot," *International Conference on Technology and Automation*, Vol. 5, pp. 73-88, 2005.
- [14] S. Majima, T. Kasai, and T. Kadohara, "A Design of a Control Method of Changing Yaw Direction of an Underactuatted Unicycle Robot," *Proc. IEEE Region 10 Conference, TENCON*, pp. 1-4, 2006.
- [15] 洪介仁，「車與桿倒單擺系統之平衡控制」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十二年。
- [16] 凌朝雄，「慣性輪單擺之非線性控制」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十三年。
- [17] 呂育勝，「利用順滑模態之球與弧系統的平衡控制」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十七年。
- [18] 劉士源，「以回授線性化與順滑模態控制之球與球系統的平衡控制」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十八年。
- [19] H. Baruh, *Analytical Dynamics*, WCB/McGrqw-Hill, 1999.
- [20] 朱立銘，「以視覺伺服為基礎之球與板系統追蹤平衡控制」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十八年。
- [21] 林浩軒，「利用全狀態回授線性化的球與輪系統之平衡控制」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十五年。

- [22] P. D. Kemp and Y. Yavin, "Stabilization and Control of the Motion of a Rolling Disk by Using Two Overhead Rotors," *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 39, No. 7-8, pp. 237-252, 2000.
- [23] P. D. Kemp and Y. Yavin, "Stabilization and Path Controllability of the Motion of a Rolling Disk by Using Two Overhead Rotors," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 337, No. 2, pp. 147-169, 2000.
- [24] Y. Yavin, "Directional Control of the Motion of a Rolling Disk by Using a Rotor Fixed in the Disk's Plane," *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 50, No. 10-12, pp. 1659-1668, 2005.
- [25] R. W. Brockett, "Feedback Invariants for Nonlinear Systems," *Proceedings of IFAC Congress*, Helsinki, pp. 1115-1120, 1978.
- [26] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer, London, 1995.
- [27] H. Nijmeijer and A. V. Schaft, *Nonlinear Dynamic Control Systems*, Springer-Verlag, NY, 1990.
- [28] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*, Prentice Hall, London, 1995.
- [29] J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, 1991.
- [30] B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall International Editions, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [31] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical System*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [32] H. K. Khalil, *Nonlinear System*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.

- [33] *Encoder HS56A Datasheet*, HONEST SENSOR, 2009.
- [34] *ADG506A/ADG507A Datasheet*, Analog Device, Inc, 1998.
- [35] *TMS320x281x DSP System Control and Interrupts Reference Guide*, Texas Instruments, 2002.
- [36] *TMS320x281x DSP Event Manager (EV) Reference Guide*, Texas Instruments, 2004.
- [37] Z. Yu and R. Choe, "Development & Verification of a Low-Cost IMU for Vehicle Attitude Determination," *Aerospace Technology Seminar Singapore*, 2007.
- [38] R. P. G. Collinson, *Introduction to Avionics System*, pp. 277-280, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.
- [39] S. Merhav, *Aerospace Sensor System and Applications*, pp. 396-407, Springer-Verlag, NY, 1996.
- [40] R. G. Brown and P. Y. C. Hwang, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, pp. 192-197, John Wiley & Sons, NY, 1992.
- [41] F. Kappeler, *Unicycle Robot*, <http://lawwww.epfl.ch/webdav/site/la/users/139973/public/reports/Kappeler.Rapport.pdf>, 2007.

## 附錄A 單輪車系統動態方程式

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad Eq. (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \quad Eq. (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0 \quad Eq. (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau_w \quad Eq. (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \tau_d \quad Eq. (5)$$

Eq. (1) :

$$\begin{aligned} & m_d [l^2 \ddot{\alpha} + l_r \dot{\beta}^2 \sin \alpha + l^2 \dot{\beta}^2 \cos \alpha \sin \alpha - 2l^2 \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos^2 \alpha \cos \beta - 2l_r \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \\ & - l_r \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta - l^2 \ddot{\gamma} \sin \beta + l_r \dot{\gamma}^2 \sin \alpha \sin^2 \beta - l^2 \dot{\gamma}^2 \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta \\ & - l_r \dot{\gamma} \dot{\theta} \sin \alpha \sin \beta + l_r \ddot{\theta} \cos \alpha - gl \sin \alpha \cos \beta] \\ & + m_b \left[ \frac{1}{4} l^2 \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} l_r \dot{\beta}^2 \sin \alpha + \frac{1}{4} l^2 \dot{\beta}^2 \cos \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} l^2 \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos^2 \alpha \cos \beta \right. \\ & - l_r \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} l_r \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta - \frac{1}{4} l^2 \ddot{\gamma} \sin \beta + \frac{1}{2} l_r \dot{\gamma}^2 \sin \alpha \sin^2 \beta \\ & \left. - \frac{1}{4} l^2 \dot{\gamma}^2 \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta - \frac{1}{2} l_r \dot{\gamma} \dot{\theta} \sin \alpha \sin \beta + \frac{1}{2} l_r \ddot{\theta} \cos \alpha - \frac{1}{2} gl \sin \alpha \cos \beta \right] \\ & + I_{dx} [\dot{\beta}^2 \cos \alpha \sin \alpha + \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \beta - 2\dot{\beta} \dot{\gamma} \cos^2 \alpha \cos \beta + \dot{\beta} \dot{\phi} \sin \alpha - \dot{\gamma}^2 \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta \\ & - \dot{\gamma} \dot{\phi} \cos \alpha \cos \beta] + I_{dy} [\ddot{\alpha} \cos^2 \phi - 2\dot{\alpha} \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi + \ddot{\beta} \sin \alpha \cos \phi \sin \phi \\ & - \dot{\beta}^2 \cos \alpha \sin \alpha \sin^2 \phi + 2\dot{\beta} \dot{\gamma} \cos^2 \alpha \cos \beta \sin^2 \phi + 2\dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \cos \phi \sin \phi \\ & - \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \beta - \dot{\beta} \dot{\phi} \sin \alpha \sin^2 \phi + \dot{\beta} \dot{\phi} \sin \alpha \cos^2 \phi - \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \cos \phi \sin \phi \\ & - \dot{\gamma} \sin \beta \cos^2 \phi + \dot{\gamma}^2 \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \phi \sin \phi + \dot{\gamma}^2 \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta \sin^2 \phi \\ & - \dot{\gamma} \dot{\phi} \cos \alpha \cos \beta \cos^2 \phi + \dot{\gamma} \dot{\phi} \cos \alpha \cos \beta \sin^2 \phi + 2\dot{\gamma} \dot{\phi} \sin \beta \cos \phi \sin \phi] \\ & + I_{dz} [\ddot{\alpha} \sin^2 \phi + 2\dot{\alpha} \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi - \ddot{\beta} \sin \alpha \cos \phi \sin \phi - \dot{\beta}^2 \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta\cos^2\phi-2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\alpha\sin\beta\cos\phi\sin\phi-\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta \\
& -\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\alpha\cos^2\phi+\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\alpha\sin^2\phi+\ddot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi-\ddot{\gamma}\sin\beta\sin^2\phi \\
& -\dot{\gamma}^2\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\phi\sin\phi+\dot{\gamma}^2\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta\cos^2\phi+\dot{\gamma}\dot{\phi}\cos\alpha\cos\beta\cos^2\phi \\
& -\dot{\gamma}\dot{\phi}\cos\alpha\cos\beta\sin^2\phi-2\dot{\gamma}\dot{\phi}\sin\beta\cos\phi\sin\phi] \\
& +I_{bx}[\dot{\beta}^2\cos\alpha\sin\alpha-2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta+\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta-\dot{\gamma}^2\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta] \\
& +I_{by}[\ddot{\alpha}-\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta-\ddot{\gamma}\sin\beta] \\
& +I_{bz}[-\dot{\beta}^2\cos\alpha\sin\alpha-\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta+2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta+\dot{\gamma}^2\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta]=0
\end{aligned}$$

Eq. (2) :

$$\begin{aligned}
& m_w[l_r^2\ddot{\beta}-l_r^2\dot{\gamma}^2\sin\beta\cos\beta+l_r^2\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos\beta-gl_r\sin\beta] \\
& +m_d[-2l^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha\cos\alpha-2ll_r\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha+2l^2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta+2ll_r\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta \\
& +l_r^2\dot{\beta}+l^2\dot{\beta}\cos^2\alpha+2ll_r\dot{\beta}\cos\alpha+ll_r\ddot{\gamma}\sin\alpha\cos\beta+l^2\ddot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta \\
& -l^2\dot{\gamma}^2\cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta-l_r^2\dot{\gamma}^2\cos\beta\sin\beta-2ll_r\dot{\gamma}^2\cos\alpha\cos\beta\sin\beta+l_r^2\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos\beta \\
& +ll_r\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos\alpha\cos\beta-gl_r\sin\beta-gl\cos\alpha\sin\beta] \\
& +m_b[-\frac{1}{2}l^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha\cos\alpha-ll_r\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha+\frac{1}{2}l^2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta+ll_r\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta \\
& +l_r^2\ddot{\beta}+\frac{1}{4}l^2\ddot{\beta}\cos^2\alpha+ll_r\ddot{\beta}\cos\alpha+\frac{1}{2}ll_r\ddot{\gamma}\sin\alpha\cos\beta+\frac{1}{4}l^2\ddot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta \\
& -\frac{1}{4}l^2\dot{\gamma}^2\cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta-l_r^2\dot{\gamma}^2\cos\beta\sin\beta-ll_r\dot{\gamma}^2\cos\alpha\cos\beta\sin\beta \\
& +\frac{1}{2}ll_r\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos\alpha\cos\beta+l_r^2\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos\beta-gl_r\sin\beta-\frac{1}{2}gl\cos\alpha\sin\beta] \\
& +I_{wx}[\ddot{\beta}\cos^2\theta-2\dot{\beta}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+\ddot{\gamma}\cos\beta\sin\theta\cos\theta+\dot{\gamma}^2\cos\beta\sin\beta\sin^2\theta \\
& -\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos\beta\sin^2\theta+\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos\beta\cos^2\theta] \\
& +I_{wy}[-\dot{\gamma}^2\cos\beta\sin\beta+\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos\beta] \\
& +I_{wz}[\ddot{\beta}\sin^2\theta+2\dot{\beta}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta-\ddot{\gamma}\cos\beta\sin\theta\cos\theta+\dot{\gamma}^2\cos\beta\sin\beta\cos^2\theta \\
& -\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos\beta\cos^2\theta+\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos\beta\sin^2\theta] \\
& +I_{dx}[-2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha\cos\alpha-\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin^2\alpha\cos\beta+\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta-\dot{\alpha}\dot{\phi}\sin\alpha+\ddot{\beta}\cos^2\alpha \\
& +\ddot{\gamma}\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta+\dot{\gamma}^2\sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta+\dot{\gamma}\dot{\phi}\sin\alpha\sin\beta+\ddot{\phi}\cos\alpha] \\
& +I_{dy}[\ddot{\alpha}\sin\alpha\sin\phi\cos\phi+\dot{\alpha}^2\cos\alpha\cos\phi\sin\phi+2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\alpha\sin\alpha\sin^2\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin^2\alpha\cos\beta\sin^2\phi+\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\beta\cos^2\phi-\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta\sin^2\phi \\
& -2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\sin\beta\cos\phi\sin\phi+\dot{\alpha}\dot{\phi}\sin\alpha\cos^2\phi-\dot{\alpha}\dot{\phi}\sin\alpha\sin^2\phi+\ddot{\beta}\sin^2\alpha\sin^2\phi \\
& +2\dot{\beta}\dot{\phi}\sin^2\alpha\cos\phi\sin\phi-\ddot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin^2\phi-\ddot{\gamma}\sin\alpha\sin\beta\cos\phi\sin\phi \\
& -\dot{\gamma}^2\cos\beta\sin\beta\cos^2\phi-2\dot{\gamma}^2\cos\alpha\cos^2\beta\cos\phi\sin\phi+\dot{\gamma}^2\cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta\sin^2\phi \\
& +\dot{\gamma}^2\cos\alpha\cos\phi\sin\phi-\dot{\gamma}\dot{\phi}\sin\alpha\sin\beta\cos^2\phi+\dot{\gamma}\dot{\phi}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\phi \\
& -2\dot{\gamma}\dot{\phi}\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi] \\
& +I_{dz}[-\ddot{\alpha}\sin\alpha\cos\phi\sin\phi-\dot{\alpha}^2\cos\alpha\cos\phi\sin\phi+2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\phi \\
& +\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin^2\alpha\cos\beta\cos^2\phi+\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\beta\sin^2\phi-\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta\cos^2\phi \\
& +2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\sin\beta\cos\phi\sin\phi+\dot{\alpha}\dot{\phi}\sin\alpha\sin^2\phi-\dot{\alpha}\dot{\phi}\sin\alpha\cos^2\phi+\ddot{\beta}\sin^2\alpha\cos^2\phi \\
& -2\dot{\beta}\dot{\phi}\sin^2\alpha\cos\phi\sin\phi-\ddot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\cos^2\phi+\ddot{\gamma}\sin\alpha\sin\beta\cos\phi\sin\phi \\
& -\dot{\gamma}^2\cos\beta\sin\beta\sin^2\phi+2\dot{\gamma}^2\cos\alpha\cos^2\beta\cos\phi\sin\phi+\dot{\gamma}^2\cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta\cos^2\phi \\
& -\dot{\gamma}^2\cos\alpha\cos\phi\sin\phi-\dot{\gamma}\dot{\phi}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\phi+\dot{\gamma}\dot{\phi}\sin\alpha\sin\beta\cos^2\phi \\
& +2\dot{\gamma}\dot{\phi}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi] \\
& +I_{bx}[-2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\alpha\sin\alpha-\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin^2\alpha\cos\beta+\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta+\ddot{\beta}\cos^2\alpha \\
& +\ddot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta+\dot{\gamma}^2\sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta] \\
& +I_{by}[\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\beta-\dot{\gamma}^2\cos\beta\sin\beta] \\
& +I_{bz}[2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\alpha\sin\alpha+\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin^2\alpha\cos\beta-\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta+\ddot{\beta}\sin^2\alpha \\
& -\ddot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta+\dot{\gamma}^2\cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta]=0
\end{aligned}$$

Eq. (3) :

$$\begin{aligned}
& m_w[2l_r^2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta\sin\beta-l_r^2\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\beta+l_r^2\ddot{\gamma}\sin^2\beta-l_r^2\ddot{\theta}\sin\beta] \\
& +m_a[-ll_r\ddot{\alpha}\cos\alpha\sin\beta-l^2\ddot{\alpha}\sin\beta+ll_r\dot{\alpha}^2\sin\alpha\sin\beta-l^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin^2\alpha\cos\beta \\
& -l^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin^2\alpha\cos\beta-2ll_r\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\alpha\sin^2\beta+2l^2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta \\
& +ll_r\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\sin\beta+ll_r\ddot{\beta}\sin\alpha\cos\beta+l^2\ddot{\beta}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta-l^2\dot{\beta}^2\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta \\
& -ll_r\dot{\beta}^2\sin\alpha\sin\beta+4ll_r\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta\sin\beta+2l_r^2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta\sin\beta \\
& +2l^2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta-l_r^2\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\beta-ll_r\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\alpha\cos\beta+2ll_r\ddot{\gamma}\cos\alpha\sin^2\beta \\
& +l_r^2\ddot{\gamma}\sin^2\beta+l^2\ddot{\gamma}-l^2\ddot{\gamma}\cos^2\alpha\cos^2\beta-ll_r\ddot{\theta}\cos\alpha\sin\beta-l_r^2\ddot{\theta}\sin\beta]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_b[-\frac{1}{2}l_r\ddot{\alpha}\cos\alpha\sin\beta-\frac{1}{4}l^2\ddot{\alpha}\sin\beta+\frac{1}{2}l_r\dot{\alpha}^2\sin\alpha\sin\beta-\frac{1}{4}l^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin^2\alpha\cos\beta \\
& -\frac{1}{4}l^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin^2\alpha\cos\beta-l_r\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\alpha\sin^2\beta+\frac{1}{2}l^2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta \\
& +\frac{1}{2}l_r\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\sin\beta+\frac{1}{2}l_r\ddot{\beta}\sin\alpha\cos\beta+\frac{1}{4}l^2\ddot{\beta}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta-l_r^2\ddot{\theta}\sin\beta \\
& -\frac{1}{4}l^2\dot{\beta}^2\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta-\frac{1}{2}l_r\dot{\beta}^2\sin\alpha\sin\beta+2l_r\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta\sin\beta+\frac{1}{4}l^2\ddot{\gamma} \\
& +2l_r^2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta\sin\beta+\frac{1}{2}l^2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta-\frac{1}{2}l_r\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\alpha\cos\beta-l_r^2\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\beta \\
& +l_r^2\ddot{\gamma}\sin^2\beta+l_r\ddot{\gamma}\cos\alpha\sin^2\beta-\frac{1}{4}l^2\ddot{\gamma}\cos^2\alpha\cos^2\beta-\frac{1}{2}l_r\ddot{\theta}\cos\alpha\sin\beta] \\
& +I_{wx}[\ddot{\beta}\cos\theta\sin\theta\cos\beta-\dot{\beta}^2\sin\beta\cos\theta\sin\theta-2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta\sin\beta\sin^2\theta \\
& +\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\beta\cos^2\theta-\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\beta\sin^2\theta+\ddot{\gamma}\cos^2\beta\sin^2\theta+2\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos^2\beta\cos\theta\sin\theta] \\
& +I_{wy}[-\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\beta+2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta\sin\beta+\ddot{\gamma}\sin^2\beta-\ddot{\theta}\sin\beta] \\
& +I_{wz}[-\ddot{\beta}\cos\theta\sin\theta\cos\beta+\dot{\beta}^2\sin\beta\cos\theta\sin\theta-2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta\sin\beta\cos^2\theta \\
& +\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\beta\sin^2\theta-\dot{\beta}\dot{\theta}\cos\beta\cos^2\theta+\ddot{\gamma}\cos^2\beta\cos^2\theta-2\dot{\gamma}\dot{\theta}\cos^2\beta\cos\theta\sin\theta] \\
& +I_{dx}[-\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin^2\alpha\cos\beta+\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos^2\alpha\cos\beta+2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta+\dot{\alpha}\dot{\phi}\cos\alpha\cos\beta \\
& +\ddot{\beta}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta-\dot{\beta}^2\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta-2\dot{\beta}\dot{\gamma}\sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta-\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\alpha\sin\beta \\
& +\ddot{\gamma}\sin^2\alpha\cos^2\beta+\ddot{\phi}\sin\alpha\cos\beta] \\
& +I_{dy}[-\ddot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi-\ddot{\alpha}\sin\beta\cos^2\phi+\dot{\alpha}^2\sin\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi \\
& -\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos^2\alpha\cos\beta\sin^2\phi+\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin^2\alpha\cos\beta\sin^2\phi-\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta\cos^2\phi \\
& -2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta\sin^2\phi-2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\phi\sin\phi \\
& +2\dot{\alpha}\dot{\phi}\sin\beta\cos\phi\sin\phi+\dot{\alpha}\dot{\phi}\cos\alpha\cos\beta\sin^2\phi-\dot{\alpha}\dot{\phi}\cos\alpha\cos\beta\cos^2\phi \\
& -\dot{\beta}\sin\alpha\sin\beta\cos\phi\sin\phi-\ddot{\beta}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin^2\phi+\dot{\beta}^2\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta\sin^2\phi \\
& -\dot{\beta}^2\sin\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi-2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta\sin^2\phi+2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta\sin\beta\cos^2\phi \\
& -2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\alpha\sin^2\beta\cos\phi\sin\phi+2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\alpha\cos^2\beta\cos\phi\sin\phi \\
& -2\dot{\beta}\dot{\phi}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi-\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\alpha\sin\beta\cos^2\phi+\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\phi \\
& +2\ddot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\phi\sin\phi+\ddot{\gamma}\sin^2\beta\cos^2\phi+\ddot{\gamma}\cos^2\alpha\cos^2\beta\sin^2\phi \\
& -2\dot{\gamma}\dot{\phi}\sin^2\beta\cos\phi\sin\phi+2\dot{\gamma}\dot{\phi}\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos\phi\sin\phi \\
& +2\dot{\gamma}\dot{\phi}\cos\alpha\cos\beta\sin\beta\cos^2\phi-2\dot{\gamma}\dot{\phi}\cos\alpha\cos\beta\sin\beta\sin^2\phi] \\
& +I_{dz}[\ddot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi-\ddot{\alpha}\sin\beta\sin^2\phi-\dot{\alpha}^2\sin\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \sin^2 \phi - \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos^2 \alpha \cos \beta \cos^2 \phi + \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin^2 \alpha \cos \beta \cos^2 \phi \\
& -2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \phi + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \phi \sin \phi \\
& -\dot{\alpha}\dot{\phi} \cos \alpha \cos \beta \sin^2 \phi + \dot{\alpha}\dot{\phi} \cos \alpha \cos \beta \cos^2 \phi - 2\dot{\alpha}\dot{\phi} \sin \beta \cos \phi \sin \phi \\
& -\ddot{\beta} \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \cos^2 \phi + \ddot{\beta} \sin \alpha \sin \beta \cos \phi \sin \phi + \dot{\beta}^2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta \cos^2 \phi \\
& + \dot{\beta}^2 \sin \alpha \cos \beta \cos \phi \sin \phi - 2\dot{\beta}\dot{\gamma} \cos^2 \alpha \cos \beta \sin \beta \cos^2 \phi \\
& + 2\dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \alpha \sin^2 \beta \cos \phi \sin \phi - 2\dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \sin \phi + 2\dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta \sin \beta \sin^2 \phi \\
& + 2\dot{\beta}\dot{\phi} \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \cos \phi \sin \phi + \dot{\beta}\dot{\phi} \sin \alpha \sin \beta \cos^2 \phi - \dot{\beta}\dot{\phi} \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \phi \\
& -2\ddot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \phi \sin \phi + \ddot{\gamma} \sin^2 \beta \sin^2 \phi + \ddot{\gamma} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \phi \\
& + 2\dot{\gamma}\dot{\phi} \sin^2 \beta \cos \phi \sin \phi - 2\dot{\gamma}\dot{\phi} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos \phi \sin \phi - 2\dot{\gamma}\dot{\phi} \cos \alpha \cos \beta \sin \beta \cos^2 \phi \\
& + 2\dot{\gamma}\dot{\phi} \cos \alpha \cos \beta \sin \beta \sin^2 \phi] \\
& + I_{bx} [\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos^2 \alpha \cos \beta - \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin^2 \alpha \cos \beta + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta + \ddot{\gamma} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \\
& + \ddot{\beta} \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta - \dot{\beta}^2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta - 2\dot{\beta}\dot{\gamma} \sin^2 \alpha \cos \beta \sin \beta] \\
& + I_{by} [-\ddot{\alpha} \sin \beta - \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta + 2\dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta \sin \beta + \ddot{\gamma} \sin^2 \beta] \\
& + I_{bz} [\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin^2 \alpha \cos \beta - \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos^2 \alpha \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta + \ddot{\gamma} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \\
& - \ddot{\beta} \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta + \dot{\beta}^2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta - 2\dot{\beta}\dot{\gamma} \cos^2 \alpha \cos \beta \sin \beta] = 0
\end{aligned}$$

Eq. (4) :

$$\begin{aligned}
& m_w [-l_r^2 \ddot{\gamma} \sin \beta - l_r^2 \dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta + l_r^2 \ddot{\theta}] \\
& + m_d [-ll_r \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + ll_r \ddot{\alpha} \cos \alpha + ll_r \dot{\alpha}\dot{\gamma} \sin \alpha \sin \beta - ll_r \dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta - l_r^2 \dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta \\
& - ll_r \ddot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta - l_r^2 \ddot{\gamma} \sin \beta + l_r^2 \ddot{\theta}] \\
& + m_b [-\frac{1}{2} ll_r \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + \frac{1}{2} ll_r \ddot{\alpha} \cos \alpha + \frac{1}{2} ll_r \dot{\alpha}\dot{\gamma} \sin \alpha \sin \beta - \frac{1}{2} ll_r \dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \\
& - l_r^2 \dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta - \frac{1}{2} ll_r \ddot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta - l_r^2 \ddot{\gamma} \sin \beta + l_r^2 \ddot{\theta}] \\
& + I_{wx} [\dot{\beta}^2 \cos \theta \sin \theta + \dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta - 2\dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta \cos^2 \theta - \dot{\gamma}^2 \cos^2 \beta \cos \theta \sin \theta] \\
& + I_{wy} [-\dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta - \ddot{\gamma} \sin \beta + \ddot{\theta}] \\
& + I_{wz} [-\dot{\beta}^2 \cos \theta \sin \theta - \dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta + 2\dot{\beta}\dot{\gamma} \cos \beta \cos^2 \theta + \dot{\gamma}^2 \cos^2 \beta \cos \theta \sin \theta] = \tau_w
\end{aligned}$$

Eq. (5) :

$$\begin{aligned}
& I_{dx}[-\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha + \dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta + \ddot{\beta}\cos\alpha - \dot{\beta}\dot{\gamma}\sin\alpha\sin\beta + \ddot{\gamma}\sin\alpha\cos\beta + \ddot{\phi}] \\
& - I_{dy}[-\dot{\alpha}^2\cos\phi\sin\phi - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha\sin^2\phi + \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha\cos^2\phi + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\beta\cos\phi\sin\phi \\
& + \dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta\sin^2\phi - \dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta\cos^2\phi + \dot{\beta}^2\sin^2\alpha\cos\phi\sin\phi \\
& - \dot{\beta}\dot{\gamma}\sin\alpha\sin\beta\cos^2\phi + \dot{\beta}\dot{\gamma}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\phi - 2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi \\
& + \dot{\gamma}^2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos\phi\sin\phi - \dot{\gamma}^2\sin^2\beta\cos\phi\sin\phi - \dot{\gamma}^2\cos\alpha\cos\beta\sin\beta\sin^2\phi \\
& + \dot{\gamma}^2\cos\alpha\cos\beta\sin\beta\cos^2\phi] \\
& - I_{dz}[\dot{\alpha}^2\cos\phi\sin\phi + \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha\sin^2\phi - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha\cos^2\phi - \dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta\sin^2\phi \\
& + \dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta\cos^2\phi - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\beta\cos\phi\sin\phi - \dot{\beta}^2\sin^2\alpha\cos\phi\sin\phi \\
& + \dot{\beta}\dot{\gamma}\sin\alpha\sin\beta\cos^2\phi - \dot{\beta}\dot{\gamma}\sin\alpha\sin\beta\sin^2\phi + 2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\cos\phi\sin\phi \\
& - \dot{\gamma}^2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos\phi\sin\phi + \dot{\gamma}^2\sin^2\beta\cos\phi\sin\phi \\
& + \dot{\gamma}^2\cos\alpha\cos\beta\sin\beta\sin^2\phi - \dot{\gamma}^2\cos\alpha\cos\beta\sin\beta\cos^2\phi] = \tau_d
\end{aligned}$$



## 自述

姓名：陳奕隆

Name：Yi-Lung Chen

生日：1986/02/19

出生地：台灣 嘉義市

住址：嘉義縣竹崎鄉灣橋村五間厝 49 之 21 號

電話：(05)2791710

學歷：

國立成功大學工程科學系研究所

元智大學電機工程學系

國立嘉義高中

嘉義市蘭潭國中

嘉義市林森國小

